

## SYMMETRIOITA, LAATOITUKSIA JA TAIDETTA (YLÄKOULUN VERSIO)

**Tekijät:** Anne-Maria Ernvall-Hytönen, Terhi Juntunen, Jarkko Kari, Ville Saarikivi

**Laadittu** syksyllä 2021-keväällä 2022.

Tämä teos on lisensoitu Creative Commons Nimeä 4.0 Kansainvälinen -lisenssillä.  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.fi>

**Kohderyhmä:** Yläkoulu, lukiolaisille/erityisen edistyneille yläkoululaisille on myös oma materiaalinsa, joka löytyy lukion oppimateriaalien alta.

Materiaalissa on lisäksi joitakin pohdintatehtäviä, jotka on tarkoitettu ylöspäin eriyttämiseen.

**Esitiedot:** Tämän oppitunnin pystyy käymään läpi hyvinkin vähillä esitiedoilla, mutta ymmärrys klasisisen geometrian perusteet (yhdenmuotoisuus, jne.) on paikallaan.

**Oppitunnin kesto:** 45 minuuttia

**Oppimistavoitteet:** Oppitunnin jälkeen opiskelija osaa nimetä erilaisia symmetrioita ja hahmottaa kuvioista symmetrioita. Lisäksi oppilas pystyy itse suunnittelemaan symmetrisiä kuvioita.

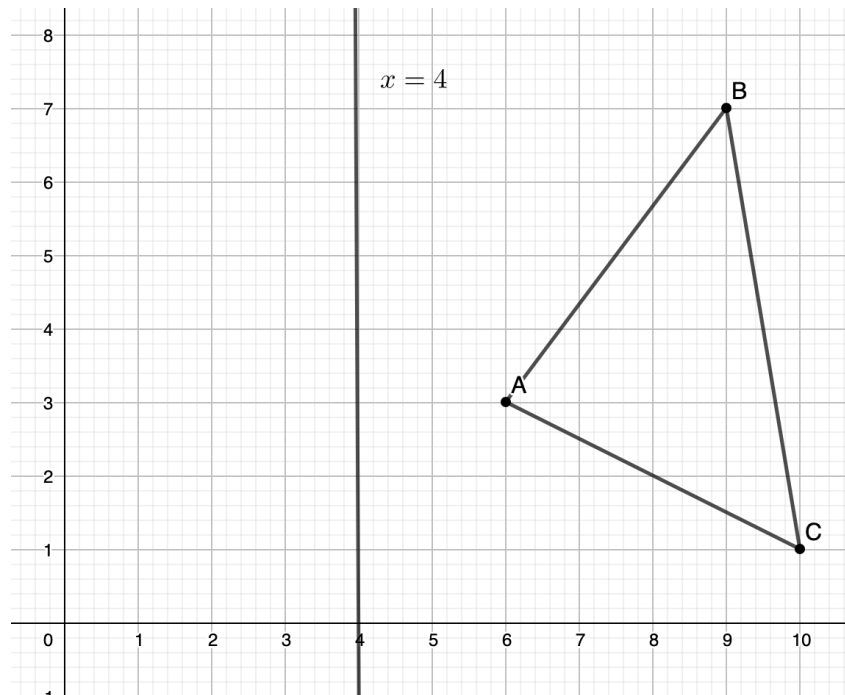
**Muut tavoitteet:** Tavoitteena on, että oppitunnin jälkeen oppilaat näkevät matematiikkaa uusissa yhteyksissä ja he ovat kiinnostuneita matematiikan ja taiteen yhtymäkohdista. Joitain oppitunnin tehtäviä voi myös käyttää apuna harpin tai viivaimen käytön opettelussa.

**Sisältö:** Symmetria (peilaus, kierto, siirtosymmetria) ja niiden sovellukset.

**Toteutus:** Oppituntiin kuuluu opettajan kalvopaketti sekä oppilaiden tehtäväsarja. Opettaja voi valita sopivaksi katsomansa osajoukon tehtävistä tai antaa oppilaille kaikki tehtävät pohdittaviksi niin, että oppilaat valitsevat omat suosikkinsa joko aihepiirien tai vaikeusasteen perusteella.

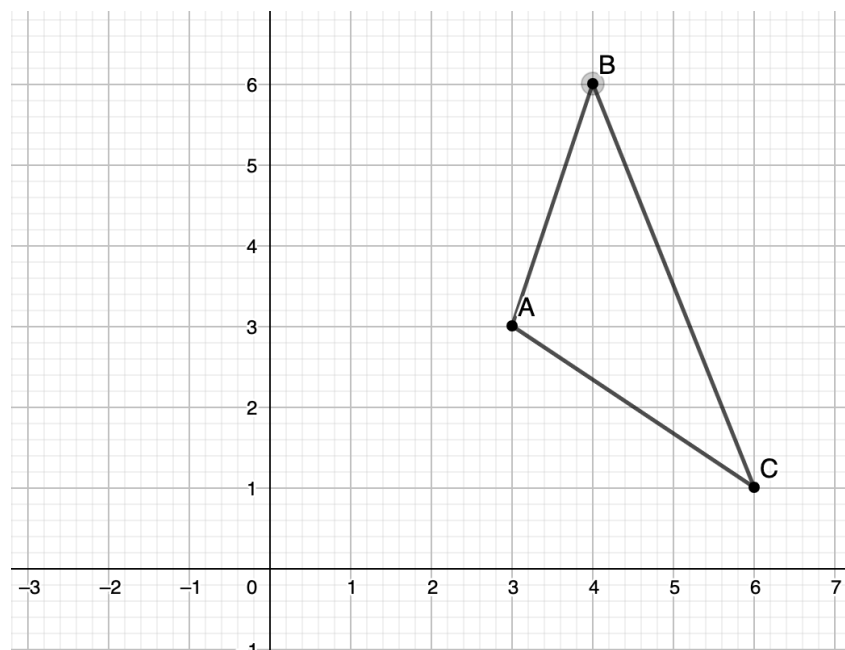
TEHTÄVIÄ

**Tehtävä 1.** Oheisessa kuvassa on kolmio  $ABC$  ja suora  $x = 4$ . Peilaa kolmio suoran  $x = 4$  suhteen ja piirrä kuva.

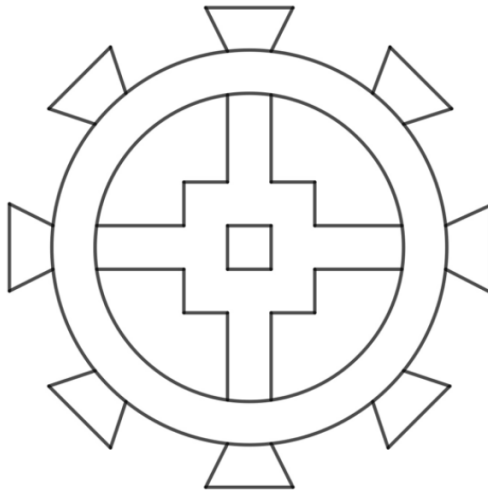


**Tehtävä 2.** Piirrä kolmion  $ABC$  sisään toinen kolmio, jonka kärjet ovat kolmion  $ABC$  sivujen keskipisteissä.

**Tehtävä 3.** Oheisessa kuvassa on kolmio  $ABC$ . Kierrä kolmiota origon suhteen  $90$  astetta positiiviseen kiertosuuntaan (eli vastapäivään) ja piirrä kuva.



**Tehtävä 4.** (Muokattu MAOL:n peruskoulun matematiikkakilpailun alkukilpailun tehtävästä 2019) Tarkastellaan oheista kuviota.



- (1) Onko kuvassa peilisymmetrioita? Jos on, niin mitkä ovat symmetria-akselit?
- (2) Onko kuvassa kiertosymmetrioita? Jos on, niin minkä pisteen suhteen ja minkälaiset kierrot?

Seuraavissa tehtävissä tutustutaan hollantilaisen kuvataiteilijan ja graafikon, Maurits Cornelis Escherin (1898-1972), tuotantoon. Escherin töissä esiintyy usein mielenkiintoisia symmetrioita.

**Tehtävä 5.** Tutustu Escherin taiteeseen M.C. Escher Foundationin ja The M.C. Escher Companyn julkaiseman gallerian avulla

<https://mcescher.com/gallery/symmetry/>

tai EscherGranadan Youtube-videon ”Escher y el efecto Droste / Escher and the Droste Effect” avulla:

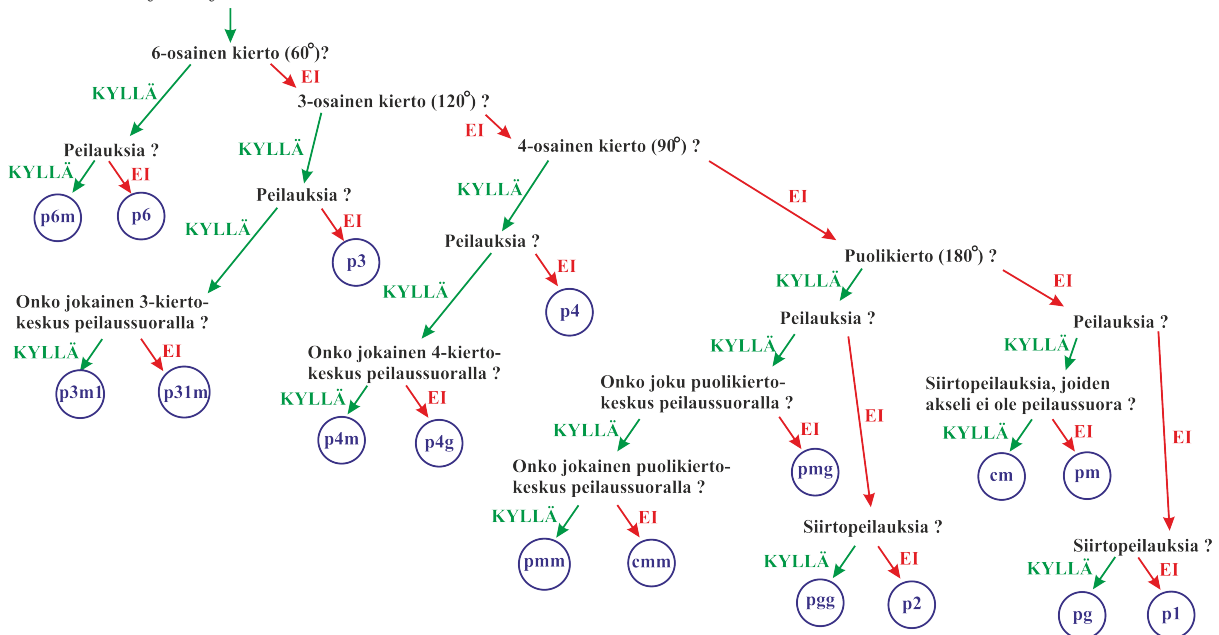
<https://www.youtube.com/watch?v=9WHdyG9mJaI&t>.

**Tehtävä 6.** Tutustu Escherin liskotyöhön Escher Foundationin ja The M.C. Escher Companyn julkaiseman kuvan avulla

[https://mcescher.com/gallery/symmetry/#iLightbox\[gallery\\_image\\_1\]/23](https://mcescher.com/gallery/symmetry/#iLightbox[gallery_image_1]/23).

Etsi työn kierrot, peilaukset ja siirtopeilaukset.

**Pohdintatehtävä 7.** Symmetrioita voidaan luokitella oheisen vuokaavion avulla. Etsi vuokaavion avulla liskotyön ryhmä.



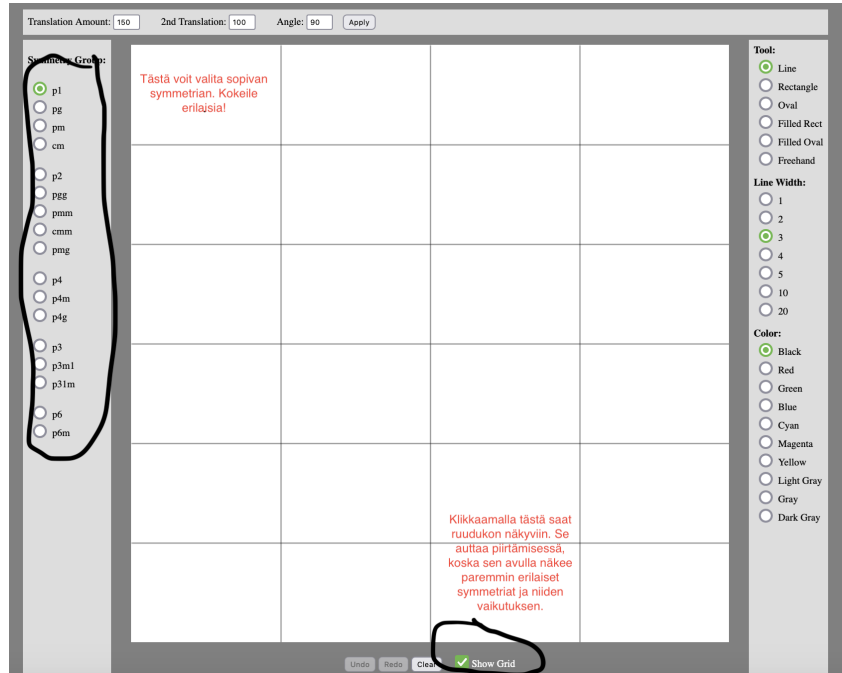
**Tehtävä 8.** Tutustu Escherin Angels and Demons -työhön Escher Foundationin ja The M.C. Escher Companyn julkaiseman kuvan avulla

[https://mcescher.com/gallery/symmetry/#iLightbox\[gallery\\_image\\_1\]/37](https://mcescher.com/gallery/symmetry/#iLightbox[gallery_image_1]/37)  
Etsi työn kierrot, peilaukset ja siirtopeilaukset.

**Pohdintatehtävä 9.** Etsi ylläolevan vuokaavion avulla Angels and Demons -työn ryhmä.

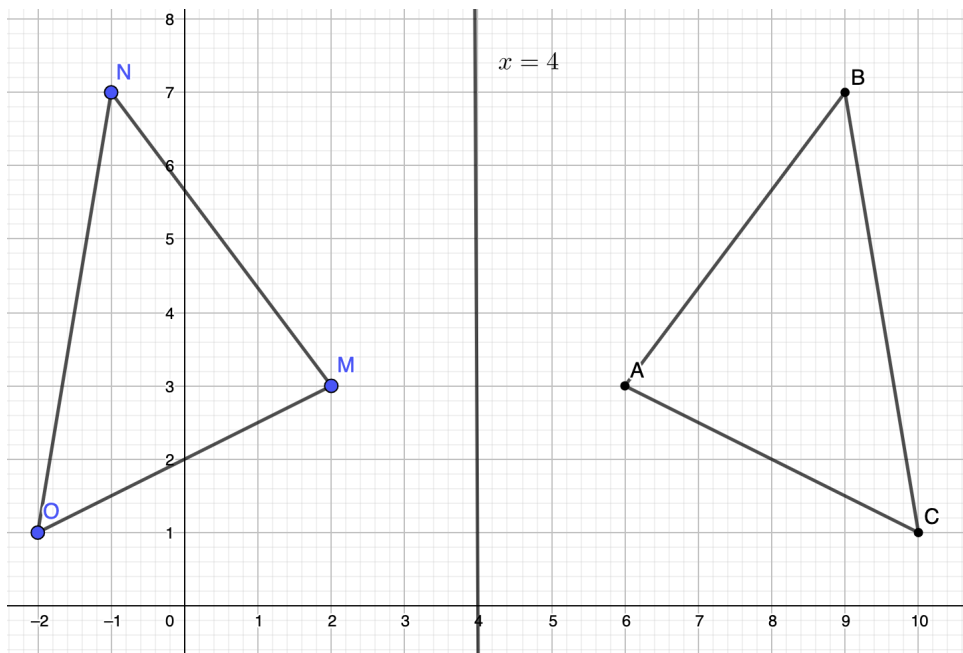
**Tehtävä 10.** Valitse Escher Foundationin ja The M.C. Escher Companyn julkaisemasta galleriasta <https://mcescher.com/gallery/symmetry/> oma suosikkisi ja etsi sen symmetriat.

**Tehtävä 11.** Mene David Eekin kehittämälle Wallpaper Symmetry -sivustolle osoitteeseen <https://math.hws.edu/eck/js/symmetry/wallpaper.html> ja luo taustakuva.



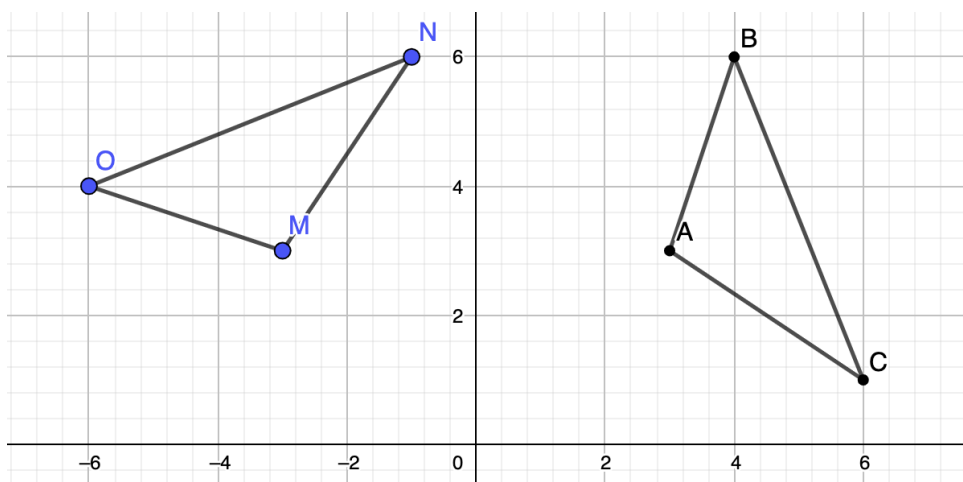
RATKAISUT

1.

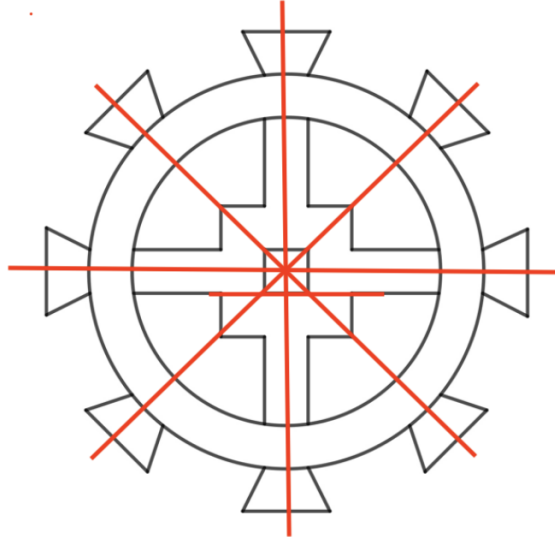


2. Etsitään ensin kolmion kärkipisteet ja sitten yhdistetään ne. Sivujen keskipisteet saadaan esimerkiksi piirtämällä janoille keskinormaalit harpilla ja viivaimella: Piirretään ympyrät, joiden säde on kunkin sivun pituus ja keskipiste sivun päätepiste. Tehdään tämä jokaisen sivun kummallakin päätepisteellä. Kun näiden ympyröiden eri puolilla janaa olevat leikkuspisteet yhdistetään, niiden leikkauspiste sivun kanssa on kolmion sivun keskipiste.

3.



4. Peilisyymetria-akselit on merkitty punaisella tähän kuvaan:



Kuvassa on 90 asteen symmetrinen kierto keskipisteen suhteen, ja tämän seurauksena myös kaikki 90 asteen monikerrat.

5. Tähän ei ole malliratkaisua. Toivottavasti pidit taiteesta!
6. Kuvassa on 120 asteen kiertosymmetriat niiden pisteiden ympäri, joissa kolmen liskon päät kohtaavat, oikeiden takajalkojen polvet kohtaavat tai vasempien takajalkojen kantapäät kohtaavat.
7. Symmetriaryhmä on  $p3$ .
8. Kuvassa on 90 asteen kiertosymmetriat niiden pisteiden ympäri, joissa neljän enkelin siivet kohtaavat, ja 180 asteen kiertosymmetriat niiden pisteiden ympäri, joissa kahden enkelin ja kahden demonin jalat kohtaavat. Lisäksi on vaaka- ja pystysuorat peilaussuorat, jotka puolittavat enkelit ja demonit.
9. Symmetriaryhmä on  $p4g$ .
10. Tämä tehtävä ratkaistaan vastaavasti kuin ylläolevat vastaavat tehtävät.
11. Tähän tehtävään ei ole oikeita tai väriä vaihtoehtoja.