Vaikeat ongelmat, riittävän hyvän ratkaisun etsiminen, löytäminen ja hyväksyminen

Tekijät: Tarja Ylivuori, Aleksi Karhu, Mats Gyllenberg, Havu Miikonen

Laadittu syksyllä 2021.

Kohderyhmä: Yläkoulu, lukio, ammatillinen koulutus. Aiheen käsittelyn laajuus ja syvyys ryhmän mukaan.

Esitiedot: Tunti sopii pidettäväksi erityisen hyvin silloin, kun on puhuttu suurista luvuista perusopetuksessa tai kombinatoriikasta lukiossa.

Oppitunnin kesto: Oppitunti koostuu lyhyestä alkuinfosta, kiertopisteissä tehtävistä toiminnallisista tehtävistä ja lopun yhteenvedosta. Suunnitelma on laadittu 75 minuutin mittaiselle oppitunnille, mutta sitä on helppo muokata myös muunlaiseen käyttöön sopivaksi.

Oppimistavoitteet:
- Joidenkin ongelmien ratkaisuavaruuksien suuruuden hahmottaminen, esim. kauppamatkustajan ongelma ja tasajako (number partitioning problem)
- Tutustuminen joihinkin strategioihin ongelmien ratkaisemiseksi, esim. ahne algoritmi ja fair share sequence
- Omien ongelmaratkaisutaitojen kehittäminen

Muut tavoitteet:
- Toiminnallisuuden lisääminen kouluopetukseen
- Opiskelijan tiimityötaitojen kehittyminen
- Innostaminen ja kiinnostuksen lisääminen

Sisältö: Neljä toimintapistettä:
- A: Kauppamatkustajan ongelma
- B: Kontin pakkaaminen
- C: Tasajako
- D: Alkutekijät

Toteutus:
- 10 min alkuinfo: Johdanto ja pisteillä olevien ongelmien esittely, apuna [Integraalipaivat-VaikeatOngelmat.pptx.](Integraalipaivat-VaikeatOngelmat.pptx)
- 40 min kiertopisteet.
    - Opettajan valitsemalla tavalla opiskelijat taltioivat rastien ratkaisujaan ja laittavat opettajalle jakoon lopun yhteenvetoa varten.

- Esim. valokuvat.
- Opettaja voi tehdä kierrosta kilpailullisen.

- 25 min loppuyhteenveto: työskentelyn aikana tehtyjen havaintojen kokoaminen, apuna Integraalipaivat-VaikeatOngelmat.pptx.

Pisteiden kuvaus:

A: Kauppamatkustajan ongelma (traveling salesperson problem):
Meillä on *n* kaupunkia ja halutaan suunnitella mahdollisimman lyhyt reitti, joka käy jokaisessa kaupungissa. Mahdollisia reittejä on *n!* kappaletta, joten kun kaupunkien määrä on suuri, niin jokaista reittiä ei ole mitenkään mahdollista kokeilla. Suurimmassa osassa reiteistä tosin ei ole mitään järkeä. Ihmisellä on ihan hyvä intuitio siitä, miten reitti kannattaa suunnitella. Strategia voi olla esimerkiksi mennä seuraavaksi aina lähimpään kaupunkiin. Millaisessa tapauksessa tämä strategia ei olekaan järkevä?

Kaikki reitit, jotka käyvät jokaisessa kaupungissa, ovat ratkaisuja ongelmaan, mutta jotkin niistä ovat *mitattavalla tavalla* parempia kuin toiset. On myös yleisesti vaikeaa sanoa, onko jokin annettu ratkaisu paras mahdollinen. Tämä poikkeaa matematiikan tehtävistä yleensä, sillä tehtävä ei ratkea käyttämällä tiettyä opittua menetelmää eikä ratkaisua löydy kirjan takaa.

Piste voidaan toteuttaa joko niin, että korkkitauluun on laitettu tukevia nastoja “kaupungeiksi” ja tehtävänä on tietyn (reilun) pituisen langan avulla yhdistää pisteet reitiksi, joka käy kaikissa “kaupungeissa” ja palaa takaisin lähtöpisteeseen. Ratkaisun hyvyyttä arvioidaan mittaamalla yli jääneen langan pituus.

Vaihtoehtoisesti kauppamatkustajan ongelmaan voi tutustua applettien avulla:
Simulated Annealing: The Travelling Salesman Problem:
https://www.fourmilab.ch/documents/travelling/anneal/
tai
Melanie Herzog, Sebastian Lotz, Wolfgang F. Riedl (Technische Universität München): The Travelling Salesman Problem:
https://www-m9.ma.tum.de/games/tsp-game/index_en.html

B: Kontin pakkaaminen:
Halutaan täyttää suorakaiteen muotoinen alue eri kokoisilla suorakaiteen muotoisilla palasilla niin, että alue saadaan mahdollisimman täyteen. Tai täytetään suorakaide erilaisilla viiden ruudun tetrispaloilla. Oikeita ratkaisuja voi olla useita!

Vaihtoehtoisesti pakkausongelmaan voi tutustua Transum.org-sivuston appletilla:
https://www.transum.org/Maths/Activity/Jigsaw/Pentominoes.asp?Level=1

C: Tasajako, lukujen ositusongelma (partition problem):
Meillä on *n* lukua ja halutaan jakaa ne kahteen joukkoon niin, että joukkojen summat ovat mahdollisimman samankokoiset, parhaassa tapauksessa siis yhtä suuret. Mahdollisia tapoja valita ensimmäinen joukko on 2^n (mukaan lukien tapaukset, jossa toinen joukoista on tyhjä). Jälleen ihmisellä on jokin käsitys siitä, miten numeroita kannattaa jakaa joukkoihin. Esimerkiksi voidaan

järjestää numerot ensin suuruusjärjestykseen ja laittaa joka toinen luku toiseen joukkoon. Tämä ei kuitenkaan aina tuota parasta mahdollista ratkaisua.

Vuorottelua yleensä parempi järjestys jakaa luvut saadaan Thuen–Morsen lukujonosta. Lukujono alkaa luvulla 1 ja se rakennetaan rekursiivisesti niin, että lukujonon edellinen vaihe kopioidaan, liitetään loppuun ja kopiossa kaikki ykköset vaihdetaan kakkosiksi ja kakkoset ykkösiksi. Lukujonon muodostus alkaa siis näin:
1
1**2**
12**21**
1221**2112**
12212112**21121221**
...
Jako suoritetaan niin, että luvut järjestetään *laskevaan* suuruusjärjestykseen. Ensimmäiseen joukkoon laitetaan ne luvut, joiden järjestysnumeron kohdalla lukujonossa on luku 1 ja toiseen ne, joiden kohdalla on luku 2. Lukujono tunnetaan myös nimellä *fair sharing sequence*. Sen avulla jakamalla esim. erilaisia karkkeja kahdelle ihmiselle saadaan reilumpi jako kuin vuorottelemalla 121212..., sillä vuorottelemalla ensimmäinen valitsija saa aina valita lopuista ensin mieleisensä karkin.

Kolmas luonnollinen lähestymistapa on *ahne algoritmi*: laitetaan suurin luku ensimmäiseen joukkoon, toisiksi suurin toiseen joukkoon, ja siitä eteenpäin seuraavaksi suurin luku siihen joukkoon, jonka kokonaissumma on siihen mennessä pienempi.

Esimerkki: Luvut ovat 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 27. Valitsemalla joka toinen luku toiseen joukkoon saadaan summiksi 58 ja 70. Thuen–Morsen lukujonon avulla jakamalla saadaan summat 65 ja 63. Ahneella tavalla valitsemalla saadaan joukkojen summiksi 64 ja 64, eli varmasti optimaalinen ratkaisu. Optimaalisia ratkaisuja voi olla useita.

Kannattaa huomata, että parhaassa ratkaisussa joukot eivät välttämättä ole yhtä suuret, eikä jakoa ole aina mahdollista saada tasan.

Vaihtoehtoisesti ositusongelmaan voi tutustua Aleksi Karhun appletilla:
https://www.geogebra.org/m/bbbcprzv

D: Alkutekijät:
On olemassa ongelmia, jotka ovat helppoja ratkaista yhteen suuntaan, mutta vaikeita toiseen suuntaan. On helppo kertoa alkulukuja keskenään, mutta työläämpää on selvittää annetun luvun alkutekijät.

Pisteen voi toteuttaa esimerkiksi niin, että yksi oppilas kertoo valitsemansa salaiset alkuluvut keskenään ja antaa niiden tulon muille oppilaille jaettavaksi alkutekijöihin. Tai opettaja julkaisee luvun ja sitten kilpaillaan, kuka selvittää sen alkutekijät ensin.

Hoksaaminen: Neliölukuja tunnistamalla ja neliöiden erotuksen muistikaavaa käyttämällä saadaan esimerkiksi
$143 = 144-1 = 12^2-1^2 = (12+1)(12-1) = 13\cdot 11$ ja

$221 = 225-4 = 15^2-2^2 = (15+2)(15-2) = 17\cdot 13$.

Voidaan oivaltaa, että jos luku ei mennyt tasan jaettaessa luvulla 3, niin myöskään lukua 6 ei tarvitse testata. Lisäksi jos yhtään alkutekijää ei löydy, kun on kokeiltu lukuja $\sqrt{n}$
:ään asti, voidaan todeta, että tarkasteltu luku on alkuluku.