KETJUMURTOLUVUT

Tekijät: Anne-Maria Ernvall-Hytönen, Marko Hiltunen, Olga Kaliuta, Janina Kivimäki, Sari Pirkkalainen, Mikko Salminen, Erika Väänänen

Laadittu keväällä 2023.

Kohderyhmä: Matematiikkakerho (lukio) / MAA11 -oppitunti / matematiikkaluokka (yläkoulu)

Esitiedot:

- Lukujoukot
- Murtolukujen laskusäännöt
- Eukleideen algoritmi
- Summan ja erotuksen tulo

Oppitunnin kesto: 2 x 45 min tai 75 min riippuen oppilaista / opiskelijoista

Oppimistavoitteet: Oppitunnin jälkeen opiskelija osaa muodostaa rationaaliluvuille ketjumurtoesityksen. Opiskelija huomaa Eukleideen algoritmin sekä ketjumurtolukujen välisen yhteyden. Opiskelija osaa muodostaa myös irrationaalisille neliöjuurille ketjumurtoesityksen. Opiskelija erottaa, että rationaaliluvuille ketjumurtokehitys päättyy joskus ja irrationaaliluvuille ketjumurtoesitys ei pääty koskaan. Opiskelija osaa laskea konvergentteja.

Muut tavoitteet: Opiskelija hahmottaa, miten neliöjuuria voidaan arvioida ilman laskinta. Opiskelija kiinnostuu ohjelmoinnista apuvälineenä ketjumurtolukuesitysten tekoon. Opiskelija tutkii, miten laskimet laskevat irrationaalilukuja. Opiskelija pohtii, miten hyvä approksimaatio katkaistu ketjumurtoluku on irrationaaliluvulle. Kultaisen leikkauksen ketjumurtoesitys.

Sisältö:

- Ketjumurtolukujen teoriaa
- Ketjumurtolukujen sieventäminen murtoluvuksi ja toisin päin
- Eukleideen algoritmi sekä ketjumurtoesitys
- Ketjumurtoesitys irrationaaliluvuille sekä miten hyvin ne approksimoivat irrationaalilukuja
- Katkaistun ketjumurtoesityksen antama murtoluku, eli konvergentti

Toteutus: Peruskoulun matikkaluokkalaisille pitää käydä Eukleideen algoritmi sekä summan ja erotuksen tulo ennen tämän materiaalin asioita, jotta oppilas pystyy järkevästi käsittelemään tehtäviä. Vaihtoehtoisesti käsitellään vain osat 1 ja 2. Materiaalin voi myös jakaa kahteen osaan. 1. kerralla osat 1-3 ja toisella kerralla 4. osa.

- **Osa I**: Motivointi, keskustelua eri lukujoukoista.
- Muokataan lyhyistä ketjumurtoluvuista yksi murtoluku. Kerrataan murtolukujen laskusääntöjä.
- Esitellään tarkemmin ketjumurtolukuihin liittyvää teoriaa. Rationaaliluvuille päättyvä esitys ja irrationaaliluvuille päättymätön esitys. Esimerkkejä
- Harjoitellaan ketjumurtoluvun kirjoittamista murtoluvuista.
- Käytetään Eukleideen algoritmia samoille murtoluvuille ja pohditaan, mikä yhteys ketjumurtoluvuilla sekä Eukleideen algoritmilla on.
- **Osa II**: Muodostetaan irrationaaliluvuille ketjumurtoesityksiä. Harjoitustehtäviä alla.
- Lasketaan konvergentteja ja tarkastellaan, miten hyvin ne approksimoivat irrationaalilukua.

1. Johdattelutehtäviä

Tehtävä 1. Tehtävä 1. Sievennä yhdeksi murtoluvuksi

a) $2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}$

b) $1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}$

2. Ketjumurtolukujen teoria

Yksinkertaiseksi ketjumurtoesitykseksi tai *yksinkertaiseksi ketjumurtokehitelmäksi* kutsutaan positiivisen luvun esittämistä muodossa

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}},$$

missä luvut $a_1, \ldots$ ovat positiivisia kokonaislukuja ja a_0 on epänegatiivinen kokonaisluku. Lisäksi sovitaan, että viimeinen luvuista a_i (jos siis kehitelmä on päättyvä) on suurempi kuin 1.

Käytännössä tilanne on tämä: Jos kyseessä on rationaaliluku, päättyy tämä esitys joskus (eli noiden kolmen pisteen tilalle ei tule äärettömän pitkää jonoa). Jos kyseessä on irrationaaliluku, ei tämä esitys pääty koskaan. Jälkimmäinen on helppo nähdä. Ensimmäinen ei ole niin triviaali. Nämä jätetään lukijoiden vapaaehtoisiksi pohdintatehtäviksi.

Tilan säästämiseksi on usein helpompi kirjoittaa $[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$ merkinnän

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}},$$

sijasta. Esimerkiksi tehtävän 1 a-kohta voidaan esittää muodossa $[2; 3, 4]$.

Esimerkki 1. Muunnetaan murtoluku $\frac{3}{4}$ yksinkertaiseksi ketjumurtoluvuksi

$$\frac{3}{4} = 0 + \cfrac{1}{\frac{4}{3}} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}},$$

eli $[0; 1, 3]$. Edellä saatiin $a_0 = 0$, sillä on $0 < \frac{3}{4} < 1$. Vastaavasti saatiin $a_1 = 1$, sillä pätee $1 < \frac{4}{3} < 2$. Tämän jälkeen huomataankin, että luku on haluttua muotoa ja tehtävä on ratkaistu.

Tehtävä 2. Muunna $\frac{12}{7}$ yksinkertaiseksi ketjumurtoluvuksi.

3. Eukleideen algoritmin ja ketjumurtolukujen yhteys

3.1. Lämmittelytehtäviä

Tehtävä 3. Kirjoita yksinkertainen ketjumurtoesitys luvulle $\frac{22}{17}$ ja Eukleideen algoritmi luvuille 22 ja 17.

Tehtävä 4. Kirjoita nyt yksinkertainen ketjumurtoesitys luvulle $\dfrac{42}{19}$ ja Eukleideen algoritmi luvuille 42 ja 19.

Pohdintatehtävä 5. Mitä yhteistä ketjumurtoesityksessä ja Eukleideen algoritmissa on?

3.2. **Eukleideen algoritmin ja ketjumurtolukujen yhteys perusteltuna**

Ylläolevia harjoitustehtäviä laskiessa saattoi tulla sellainen tunne, että laski samaa asiaa kaksi kertaa, mutta vain kirjoitusasu vaihteli hieman. Lisäksi ketjumurtoesityksessä kertoimiksi tuli ihan samoja lukuja kuin Eukleideen algoritmissa kertoimiksi. Otetaan vielä yksi esimerkki ja pyritään tämän jälkeen muotoilemaan asia täsmällisesti:

Esimerkki 2. Vertaillaan ketjumurtoesitystä $\frac{12}{67} = [0; 5, 1, 1, 2, 2]$ ja Eukleideen algoritmia luvuille 12 ja 67:

$$
\begin{aligned}
67 &= \boxed{5} \cdot 12 + 7 \\
12 &= \boxed{1} \cdot 7 + 5 \\
7 &= \boxed{1} \cdot 5 + 2 \\
5 &= \boxed{2} \cdot 2 + 1 \\
2 &= \boxed{2} \cdot 1 + 0
\end{aligned}
$$

Ylläolevan esimerkin väritetyt ja laatikoidut luvut ovat samat kuin luvun $\frac{12}{67}$ ketjumurtoesityksessä.

Pyritään nyt perustelemaan tämä havainto täsmällisesti. Tarkastellaan positiivisia kokonaislukuja m ja n. Oletetaan, että $m < n$. Jos aloitetaan laskemaan näille luvuille Eukleideen algoritmia, on ensimmäinen vaihe kirjoittaa

$$n = qm + r,$$

missä $0 \leq r < m$. Aloitetaan nyt ketjumurtoesityksen kirjoittaminen luvulle $\frac{n}{m}$. Tavoite on kirjoittaa luku muodossa

$$\frac{n}{m} = a + \frac{b}{m},$$

missä a on kokonaisosa ja b on kokonaisluku, missä $0 \leq b < m$. Jos a on kokonaisosa, niin $\frac{b}{m} = \frac{n}{m} - a = \frac{n-am}{m}$, missä $0 \leq n - am < m$. Kun kerrotaan tämä esitys luvulle $\frac{b}{m}$ puolittain luvulla m saadaan $b = n - am$, eli $n = am + b$. Verrataan tätä Eukleideen algoritmin ensimmäiseen vaiheeseen. Saadaan

$$am + b = n = qm + r,$$

joten $a = q$ ja $b = r$. Toistetaan prosessia nyt murtoluvulle $\frac{m}{b}$.

Jos taas olisi tarkasteltu murtolukua $\frac{m}{n}$, olisi tilanne ollut muuten sama, mutta koska $\frac{m}{n} < 1$, olisi ketjumurtoesityksen alku ollut

$$\frac{m}{n} = 0 + \frac{1}{\frac{n}{m}}.$$

4. Irrationaaliluvut ja ketjumurtokehitelmät

4.1. **Esimerkkejä ja tehtäviä eri neliöjuurten ketjumurtoesitysten laskemisesta**

Esimerkki 3. Kirjoita $\sqrt{3}$ ketjumurtolukuna.

Huomataan ensin, että $1^2 = 1 < 3$ ja $2^2 = 4 > 3$. Täten on $1 < \sqrt{3} < 2$, ja kokonaisosa on 1. Vastaavaa ideaa toistamalla saadaan

$$\begin{aligned}
\sqrt{3} &= 1 + \sqrt{3} - 1 = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{3}-1}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{3}+1}{2}} \\
&= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\sqrt{3}+1}{2} - 1} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\sqrt{3}-1}{2}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{2}{\sqrt{3}-1}}} \\
&= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{2(\sqrt{3}+1)}{2}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\sqrt{3}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\sqrt{3}}}}} = [1; 1, 2, ...].
\end{aligned}$$

Kolmanneksi viimeisessä välivaiheessa siis huomataan, että on taas laskettavana $\sqrt{2}$ ketjumurtoesitys. Sen on jo todettu alkavan $[1; 1, \text{jotain}]$, joten $\sqrt{3}$ kokonaisosan on tuotava $+1$. Näin ollen ketjumurtokehitelmä alun on oltava $[1; 1, 2, \text{jotain}]$ Alun logiikalla tulee taas yksi ykkönen ja sitten yksi kakkonen, koska aivan ensimmäinen ykkönen, joka tuli $\sqrt{3}$ kokonaisosasta, menee osaksi summaa, koska saadaan luku 2. Tämä jakso toistuu loputtomiin.

Tehtävä 6. Kirjoita $\sqrt{2}$ ketjumurtolukuna.

Tehtävä 7. Kirjoita $\sqrt{5}$ ketjumurtolukuna.

Tehtävä 8. Kirjoita kultaisen leikkauksen lauseke $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ketjumurtolukuna.

Tehtävä 9. Kirjoita $\sqrt{6}$ ketjumurtolukuna.

Haastetehtävä 10. Kirjoita $\sqrt{7}$ ketjumurtolukuna.

4.2. **Miten näistä saadaan desimaaliesityksiä?**

Esimerkiksi luku $\sqrt{17}$ voidaan kirjoittaa ketjumurtolukuna muodossa

$$[4; 8, 8, 8, \ldots] = 4 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}.$$

Tälle luvulle saadaan arvioita katkaisemalla ketjumurtoesitys. Näitä katkaistuja murtolukuja kutsutaan *konvergenteiksi*. Ensimmäinen arvio on 4, toinen arvio on

$$4 + \frac{1}{8} = \frac{33}{8} = 4{,}125,$$

seuraava arvio on

$$4 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{8}} = 4 + \frac{8}{65} = \frac{4 \cdot 65 + 8}{65} = \frac{268}{65} \approx 4{,}12308.$$

Verrataan laskimen antamaan arvoon: $\sqrt{17} \approx 4{,}1231056$. Huomataan siis, että esityksestä $4 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{8}}$ saimme jo kolme desimaalia oikein.

Tehtävä 11. Hyödynnä tietoa, että $\sqrt{11} = [3; 3, 6, 3, 6, 3, 6, \ldots]$ ja laske muutama ensimmäinen konvergentti. Vertaa näitä luvun 11 desimaaliesitykseen.

Pystytään todistamaan, että ketjumurtoluvut itse asiassa antavat erittäin tarkkoja arvioita. Jos täytyy laskea desimaalikehitelmiä neliöjuurille ilman laskinta, ovat ketjumurtoesitykset erittäin tehokas tapa tehdä tämä. Jotta ketjumurtoesityksen voi laskea, ei tarvitse tietää millainen desimaaliesitys on, vain se, miten suuresta luvusta suurinpiirtein puhutaan.

Ketjumurtoesityksen tarkkuus liittyy esityksen $\alpha = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$ kertoimiin. Karkeasti voi sanoa, että mitä suurempia ovat luvut $a_1,\ a_2, \dots$, sitä parempi arvio on. Täsmällisesti voidaan todistaa, että

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{a_n q_{n-1}^2},$$

missä $\frac{p_i}{q_i}$ on i:s konvergentti.

Pohdintatehtävä 12. Laske ohjelmistolla luvun e ketjumurtokehitelmän ensimmäiset 8 kerrointa. Havaitsetko jotain säännönmukaisuutta?

5. Lisätieto: Ketjumurtolukujen yhteys yhtälöiden kokonaislukuratkaisuihin

Yhtälöitä on koulussa usein ratkaistu reaalilukujen joukossa. Esimerkiksi yhtälön $y = 2x + 5$ ratkaisut ovat kaikki suoran $y = 2x + 5$ pisteet. Toisaalta taas yhtälön $5 = x^2 + y^2$ toteuttavat kaikki ne pisteparit (x, y), jotka sijaitsevät origokeskisellä ympyrällä, jonka säde on $\sqrt{5}$. Tilanne muuttuu merkittävästi, jos halutaan etsiä ainoastaan kokonaislukuratkaisuja. Esimerkiksi yhtälön

$$y = 2x + 1$$

kokonaislukuratkaisuiksi kelpaavat kaikki pisteet $(n, 2n + 1)$, missä n on kokonaisluku. Yhtälön

$$5 = x^2 + y^2$$

kokonaislukuratkaisut ovat $(\pm 1, \pm 2)$ ja $(\pm 2, \pm 1)$, missä sallitaan kaikki mahdolliset etumerkkikombinaatiot.

Toisaalta taas esimerkiksi yhtälön $x^2 + y^2 = 6$ toteuttaa koko $\sqrt{6}$-säteinen ja origokeskinen ympyrä reaalilukujen joukossa, mutta kokonaislukujen joukossa tälle yhtälölle ei ratkaisua. Osaatko sanoa, miksi ei?

Yhtälöiden tarkastelu vain kokonaislukujen joukossa muuttaa siis tilannetta hyvin paljon. Pelkkien kokonaislukuratkaisujen etsiminen on kuitenkin oleellista esimerkiksi kryptografiassa eli salauksessa. Lisäksi kokonaislukuratkaisujen tarkastelulle on ihan oma matematiikan teoria, *Diofantoksen yhtälöiden teoria*, joka on hyvin kaunista.

Eräs mielenkiintoinen esimerkki Diofantoksen yhtälöstä on yhtälön

$$x^2 - ny^2 = 1$$

ratkaisujen etsiminen, kun n ei ole neliöluku. Jos n olisi neliöluku, olisi tilanne suoraviivainen. Huomataan, että riittää etsiä epänegatiivisia ratkaisuja, sillä negatiiviset ratkaisut saadaan näistä suoraan. Kirjoitetaan $n = n_1^2$, jolloin saadaan

$$1 = x^2 - ny^2 = x^2 - n_1^2 y^2 = (x - n_1 y)(x + n_1 y).$$

Huomataan, että luvut $x - n_1 y$ ja $x + n_1 y$ ovat kokonaislukuja sekä on $x - n_1 y \leq x + n_1 y$ ja $x + n_1 y \geq 0$. Nyt on oltava $x - n_1 y = x + n_1 y = 1$, eli $y = 0$ ja $x = 1$, jolloin kaikki ratkaisut ovat $(\pm 1, 0)$.

Tilanne muuttuu hankalammaksi, kun tarkastellaan tilannetta, jossa n ei ole neliöluku. Voidaan todistaa (mutta tämä vaatii työtä), että kaikki ratkaisut saadaan kirjoittamalla $\sqrt{n}$ ketjumurtoesityksenä ja laskemalla sen esityksen konvergentteja $\frac{p_i}{q_i}$. Tällöin kaikki ratkaisut saadaan joukosta (q_i, p_i), mutta kaikki tätä muotoa olevat lukuparit eivät ole ratkaisuja. Esimerkiksi testaamalla voi kokeilla, toimiiko ratkaisu todella. Ratkaisuja on kaikenkaikkiaan ääretön määrä.

Esimerkki 4. Tarkastellaan yhtälöä $x^2 - 3y^2 = 1$. Luvun $\sqrt{3}$ ketjumurtoesityksen alku on $[1; 1, 2, 1, 2, \dots]$. Tästä saamme konvergentit $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}, \frac{5}{3}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{19}{11}$, $\frac{26}{15}$. Nyt voimme testata ratkaisuja yhtälöön:

Aloitetaan parista $(1, 1)$:

$$1^2 - 3 \cdot 1^1 \neq 1,$$

eli ei ratkaisua. Nyt pari $(2, 1)$:

$$2^2 - 3 \cdot 1 = 1,$$

eli parit $(\pm 2, \pm 1)$ ovat ratkaisuja. Nyt pari $(5, 3)$:

$$5^2 - 3 \cdot 3^2 \neq 1,$$

eli ei ratkaisua. Nyt pari $(7,4)$:

$$7^2 - 3 \cdot 4^2 = 1,$$

eli parit $(\pm 7, \pm 4)$ ovat ratkaisuja. Nyt pari $(19,11)$:

$$19^2 - 3 \cdot 11^2 \neq 1,$$

eli ei ratkaisua. Nyt pari $(26,15)$:

$$26^2 - 3 \cdot 15^2 = 1,$$

eli parit $(\pm 26, \pm 15)$ ovat ratkaisuja. Näin voidaan jatkaa, jolloin löydetään äärettömän paljon ratkaisuja.

Jos haluat ratkaista näin erilaisia Pellin yhtälöitä, voi tohtori Ron Knottin laatimasta ketjumurtolaskimesta `https://r-knott.surrey.ac.uk/Fibonacci/cfCALC.html` olla hyötyä, sillä sen avulla saat suoraan ketjumurtoesityksen ja konvergentit.

6. Ratkaisut

1.

a) $2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}} = 2 + \frac{1}{\frac{13}{4}} = 2 + 1 \cdot \frac{4}{13} = 2 + \frac{4}{13} = 2\frac{4}{13} = \frac{30}{13}$

b) $1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}} = 1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{\cfrac{7}{2}}} = 1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{2}{7}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{37}{7}} = 1 + \frac{7}{37} = \frac{44}{7}$

2.

$$\frac{12}{7} = 1 + \frac{5}{7} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{7}{5}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{5}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{5}{2}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}},$$

eli $[1; 1, 2, 2]$.

3. Yksinkertainen ketjumurtoesitys luvulle $\frac{22}{17}$

$\frac{22}{17} = 1 + \frac{5}{17} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{17}{5}} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{2}{5}} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\cfrac{5}{2}}} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}$ eli $[1; 3, 2, 2]$

Eukleideen algoritmi luvuille 22 ja 17

$$\begin{aligned} 22 &= 1 \cdot 17 + 5 \\ 17 &= 3 \cdot 5 + 2 \\ 5 &= 2 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot 2 + 0 \end{aligned}$$

4. Yksinkertainen ketjumurtoesitys luvulle $\frac{42}{19}$

$$\frac{42}{19} = 2 + \frac{4}{19} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{19}{4}} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{3}{4}} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\cfrac{4}{3}}} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}},$$

eli $[2; 4, 1, 3]$

Eukleideen algoritmi luvuille 42 ja 19

$$\begin{aligned} 42 &= 2 \cdot 19 + 4 \\ 19 &= 4 \cdot 4 + 3 \\ 4 &= 1 \cdot 3 + 1 \\ 3 &= 3 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

6.

$$\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} - 1 = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{2}-1}} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\sqrt{2}}} = [1; 2, 2, ...]$$

7.

$$\sqrt{5} = 2 + \sqrt{5} - 2 = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{5}-2}} = 2 + \frac{1}{2+\sqrt{5}} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2+\sqrt{5}}} = [2; 4, 4, ...]$$

8.

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{2}{\sqrt{5}-1}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1+\sqrt{5}}{2}} = [1; 1, 1, ...]$$

9.

$$\begin{aligned} \sqrt{6} &= 2 + \sqrt{6} - 2 = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{6}-2}} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{6}+2}{2}} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{\sqrt{6}+2}{2} - 2} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{\sqrt{6}-2}{2}} \\ &= 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{2}{\sqrt{6}-2}}} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2+\sqrt{6}}} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2+\sqrt{6}}}} = [2; 2, 4, 2, 4, ...] \end{aligned}$$

10. Kirjoitetaan $\sqrt{7}$ ketjumurtolukuna. Ensinnäkin $2 \leq \sqrt{7} < 3$, joten $a_0 = 2$. Nyt

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}} = \sqrt{7} - 2.$$

Nyt

$$\frac{1}{\sqrt{7}-2} = \frac{\sqrt{7}+2}{7-4} = \frac{\sqrt{7}+2}{3}.$$

Koska

$$1 < \frac{2+2}{3} \leq \frac{\sqrt{7}+2}{3} < \frac{3+2}{3} < 2,$$

saadaan $a_1 = 1$. Nyt

$$\cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{\ddots}}}} = \frac{\sqrt{7}+2}{3} - 1 = \frac{\sqrt{7}+2-3}{3} = \frac{\sqrt{7}-1}{3}.$$

Käännetään jälleen:

$$\frac{3}{\sqrt{7}-1} = \frac{3(\sqrt{7}+1)}{7-1} = \frac{\sqrt{7}+1}{2}.$$

Arvioidaan:

$$1 < \frac{2+1}{2} \le \frac{\sqrt{7}+1}{2} < \frac{3+1}{2} = 2.$$

Siispä $a_2 = 1$. Nyt

$$\cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{\ddots}}} = \frac{\sqrt{7}+1}{2} - 1 = \frac{\sqrt{7}-1}{2}$$

Käännetään:

$$\frac{2}{\sqrt{7}-1} = \frac{2(\sqrt{7}+1)}{7-1} = \frac{\sqrt{7}+1}{3}.$$

$$1 = \frac{2+1}{3} \le \frac{\sqrt{7}+1}{3} < \frac{3+1}{3} < 2.$$

Siispä $a_3 = 1$. Nyt

$$\cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_5 + \cfrac{1}{\ddots}}} = \frac{\sqrt{7}+1}{3} - 1 = \frac{\sqrt{7}-2}{3}.$$

Käännetään:

$$\frac{3}{\sqrt{7}-2} = \frac{3(\sqrt{7}+2)}{7-4} = \sqrt{7}+2.$$

Nyt $4 \le \sqrt{7}+2 < 5$. Siispä $a_4 = 4$. Nyt

$$\cfrac{1}{a_5 + \cfrac{1}{a_6 + \cfrac{1}{\ddots}}} = \sqrt{7}+2-4 = \sqrt{7}-2.$$

Tämä on kuitenkin jo nähty laskettaessa lukua a_1. Siispä $a_5 = a_1$ ja jakso on löytynyt: $1 = a_1 = a_5 = a_9 = \ldots$, $1 = a_2 = a_6 = a_{10} = \ldots$, $1 = a_3 = a_7 = a_{11} = \ldots$ ja $4 = a_4 = a_8 = a_{12} = \ldots$

11. Koska

$$[3; 3, 6, 3, 6\ldots] = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{\ddots}}}}},$$

ovat ensimmäiset konvergentit 3, $3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3} \approx 3{,}33$,

$$3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6}} = 3 + \frac{6}{19} = \frac{19 \cdot 3 + 6}{19} = \frac{63}{19} \approx 3{,}316$$

Laskimella huomataan, että $\sqrt{11} \approx 3{,}317$.

Nyt on siis saatu kaksi desimaalia oikein.

12. Luvun e ketjumurtoesitys alkaa $[2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, \ldots]$. Pystytään todistamaan (mutta sitä ei tehdä tässä), että luvun e ketjumurtoesityksessä vaihtelevat kaksi peräkkäistä ykköstä ja sen jälkeen aina edellistä parillista lukua seuraava parillinen luku.