$$4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$

KYSYMYKSIÄ JA ESIMERKKEJÄ IRRATIONAALILUKUJEN (PIIN) APPROKSIMOINNISTA

Tekijät: Saara Sarsa, Eeli Tamminen, Maiju Mäenpää, Amanda Sirén ja Katri Pietiläinen

Laadittu keväällä 2023.

Kohderyhmä: Lukio-opiskelijat

Esitiedot: Perustiedot summa- ja tulomerkintöjen käytöstä (esimerkit 3 ja 4). Perustiedot integroinnista sekä puolisuunnikassäännön käytöstä (esimerkki 5).

Oppimistavoitteet: Kysymysten jälkeen oppilas ymmärtää tarpeen irrationaalilukujen approksimoinnille. Esimerkkien kautta oppilas tutustuu yleisimpiin approksimaatiomenetelmiin. Lisäksi oppilas oppii tunnistamaan paremman approksimaation epätarkemmasta sarjojen ja äärettömien tulojen tapauksissa.

Sisällys

1. Mikä on pii ja miksi sitä approksimoidaan?

Vastaus: Pii on vakio, joka kuvaa ympyrän kehän pituuden suhdetta sen halkaisijan pituuteen toisin sanoen

$$\pi = \frac{\text{kehän pituus}}{\text{halkaisijan pituus}},$$

koska ympyrät ovat keskenään yhdenmuotoisia saadaan kaikilla ympyröillä

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327\,9...$$

Pii on irrationaalinen luku eli luku, jota ei voi esittää jaksollisena tai päättyvänä desimaalikehitelmänä, kuten 0,57 tai 0,123123... Tämän vuoksi sitä tarvitsee approksimoida, eli arvioida rationaaliluvuilla tai muilla menetelmillä. Esimerkiksi laskimet eivät pysty käyttämään piistä tarkaa arvoa, joten niiden on tehtävä laskut joillain hyvin tarkoilla likiarvoilla.

2. Approksimointi rationaaliluvuilla

Laske seuraavien kahden murtoluvun arvoja ja vertaa niitä piin tarkkaan arvoon. Kumpi approksimaatio on parempi?

(1) $25/8$
(2) $22/7$

Vinkki: Jakolaskut kannattaa tehdä jakokulmalla, jolloin oppilaiden on helppo seurata kuinka hyvin approksimaatio vastaa piin tarkkaa arvoa.

3. Approksimointi sarjoilla

Laske seuraavien kahden sarjan termejä yhteen ja vertaa niitä piin tarkkaan arvoon. Kumpi approksimaatio on parempi?

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{2k+1}$
(2) $\displaystyle 2\log(2) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{(4k-2)(4k-1)}$

Vinkki: Termejä kannattaa laskea yksitellen ja taulukoida summan arvoja erilaisilla termien määrillä. Tällöin oppilaat pääsevät huomaamaan kuinka sarja alkaa suppenemaan kohti piin tarkkaa arvoa.

4. Approksimointi äärettömillä tuloilla

Laske seuraavien kahden äärettömän tulon termejä ja vertaa niitä piin tarkkaan arvoon. Kumpi approksimaatio on parempi?

(1) $\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty} \frac{8k^2}{4k^2-1}$
(2) $\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty} \left(4 - \frac{4}{(2k+1)^2}\right)$

Vinkki: Termejä kannattaa laskea yksitellen ja taulukoida tulon arvoja erilaisilla termien määrillä. Tällöin oppilaat pääsevät huomaamaan kuinka ääretön tulo alkaa suppenemaan kohti piin tarkkaa arvoa.

5. Approksimointi integraaleilla

Laske puolisuunnikassääntöä käyttämällä approksimaatio seuraaville integraaleille

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{2}{1+x^2}dx$
(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

ja vertaa sitä piin tarkkaan arvoon.
Vinkki: Puolisuunnikas sääntöä kannattaa laskea aluksi hyvin harvoilla väleillä ja seuraavaksi tarkemmilla. Tällöin oppilaat pääsevät näkemään kuinka integraalin arvo suppenee kohti piin tarkkaa arvoa.

6. Voiko muitakin irrationaalilukuja approksimoida em. menetelmillä?

Vastaus: Kyllä! Alla on esimerkkeinä kultainen leikkaus, Neperin luku, $\sqrt{2}$, ja $\ln 5$, joita voi kokeilla approksimoida esimerkkien 1-4 hengessä.

(1) $\displaystyle\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx \frac{100}{62} \approx \frac{8}{5}$
(2) $\displaystyle e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$
(3) $\displaystyle\sqrt{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(-1)^k}{2k-1}\right)$

(4) $\ln(5) = \int_0^5 \frac{1}{x} dx$