



KETJUMURTOESITYKSIÄ

Tekijät: Natalia Akselrod, Vuokko Annala, Ville Arvio, Mats Gyllenberg, Laura Heikkilä, Antti Mäkelä ja Topi Törmä

Laadittu keväällä 2023.

Tämä teos on lisensoitu Creative Commons Nimeä 4.0 Kansainvälinen -lisenssillä.

Kohderyhmä: yläkoulu ja lukio (kurssi 11)

Esitiedot: Yläkoulussa: murtoluvut, sekaluku, kokonaislukuosa, murtolukujen laskusäännöt, pii, lukiossa: Eukleideen algoritmi (π)

Oppitunnin kesto: 75 min/2x45 min, yläkoulussa 1x45 min.

Oppimistavoitteet: Oppitunnin jälkeen opiskelija tietää, mikä on ketjumurtolukuesitys jollekin murtoluvulle. Opiskelija ymmärtää Eukleideen algoritmin ja ketjumurtolukuesityksen yhteyden (lukio). Lisäksi opiskelija tietää, että piin likiarvon voi esittää muutaman vaiheen ketjumurtolukuesityksenä ja, että piin tarkka arvo voidaan esittää erilaisina päättymättöminä ketjumurtolukuesityksinä.

Sisältö: Ketjumurtolukuesitykset molempiin suuntiin. Piin ketjumurtolukuesitykset. Yhteys Eukleideen algoritmiin (lukio).

Toteutus:

Karkea aikataulusuunnitelma:

- Oppilaat laskevat ensimmäiset 3 (tai 4) tehtävää.
- Sen jälkeen teoriaa sanasta ketjumurtolukuesitys sekä muistellaan lukua pii. Piille voidaan esittää myös tarkan arvon ketjumurtoesitys.
- Lisäksi lukiossa: Eukleideen algoritmin ja ketjumurtolukuesityksen yhteys, tehtävät 4(5)–7
- Lisämateriaali: Lopussa olevat ohjelmointitehtävät

Tarkempi tunnin rakenne:

Oppilaat laskevat seuraavat kolme (tai neljä) tehtävää. Tehtävät ovat ketjumurtoesityksiä, mutta alussa tästä ei vielä mainita.

Tehtävä 1: Laske

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}$$

Minkä luvun saat?

Tehtävä 2: Laske

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}$$

Minkä luvun saat?

Tehtävä 3: Laske seuraava ja tutki saadun murtoluvun desimaalimuotoa.

$$3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1}}}$$

Lisätehtävä 4: Jos ehdit tehdä tehtävät 1-3, pohdi seuraavaa tehtävää: Miten lähtisit tekemään luvusta $\frac{43}{30}$ sellaisen esitysmuodon, jollaista oli tehtävissä 1-3? Esitysmuotoa kutsutaan *ketjumurtoesitykseksi*.

Opettaja käy läpi ketjumurtoesityksen määritelmän eli, että se on luvun esitys muodossa

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3 + \frac{b_4}{a_4 + \frac{b_5}{\ddots}}}}}$$

missä luvut a_0, a_1, \dots ja b_1, b_2, \dots ovat mitä tahansa (kompleksi)lukuja. Kyseessä on *yksinkertainen ketjumurtoesitys*, kun luvut a_1, a_2, \dots ovat positiivisia kokonaislukuja, a_0 on epänegatiivinen kokonaisluku ja $b_1 = b_2 = \dots = 1$. Tässä voi halutessaan näyttää vielä jotain esimerkkiä, kuten vaikka kuvassa 1 olevaa. Alla oleva kuva on esimerkkinä siitä, miten piin tarkka arvo voidaan esittää ketjumurtoesityksenä. (Tässä voi myös opettaja halutessaan näyttää koodilla piin ketjumurtolukuesitystä tai etsiä netistä muita esitysmuotoja.)

$$\pi = \frac{4}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{2 + \dots}}}}} = 2 + \frac{2}{1 + \frac{1 \cdot 2}{1 + \frac{2 \cdot 3}{1 + \frac{3 \cdot 4}{1 + \frac{4 \cdot 5}{1 + \dots}}}}}$$

KUVA 1. Kuva eräästä piin ketjumurtoesityksestä

Seuraavat tehtävät lähinnä lukioon (kurssi 11): Seuraavaksi oppilaat pohtivat tehtäviä 5-7. Tehtävissä 5 ja 6 on tarkoitus ymmärtää yhteys aiemmin opittuun Eukleideen algoritmiin.

Tehtävä 5: Muodosta Eukleideen algoritmi luvuille 73 ja 27 (suurin yhteinen tekijä). Eukleideen algoritmilla saadaan

$$\begin{aligned} 73 &= 2 \cdot 27 + 19 \\ 27 &= 1 \cdot 19 + 8 \\ 19 &= 2 \cdot 8 + 3 \\ 8 &= 2 \cdot 3 + 2 \\ 3 &= 1 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0. \end{aligned}$$

Lukujen 73 ja 27 suurin yhteinen tekijä on siis 1. Ketjumurtolukuna :

$$\frac{73}{27} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}$$

Huomaatko yhteyden? Mieti, miksi tämä toimii.

Tehtävä 6: Esitä yksinkertaisena ketjumurtoesityksenä luku $\frac{91}{53}$ käyttäen Eukleideen algoritmia

Tehtävä 7: Esitä $\sqrt{2}$ yksinkertaisena ketjumurtoesityksenä.

Alla on kaksi Python-kielellä kirjoitettua ohjelmaa. Tee niissä annetut tehtävät.

Ohjelmointitehtävä 1

```
# Tehtava 1: Aja koodi. Tutki mitä ohjelma tekee ja miten se toimii.
# Tehtava 2: Laske aiemmin materiaalissa käsitellyt murtolukujen
# ketjumurtolukukertoimet ohjelmakoodin avulla.
# Tehtava 3: Laske ohjelman avulla sqrt(2):n ketjumurtolukuesitys.
```

```
# Ketjumurtolukujen kertoimet laskeva aliohjelma
```

```
def kertoimet(a, b):
    if b == 0:
        return a
    else:
        print(a//b, "_", a%b, "/", b)
        return kertoimet(b, a%b)
```

```
# Paaohjelma
```

```
osoittaja = 355    # 3141592653
nimittaja = 113   # 10**9
```

```
kertoimet(osoittaja, nimittaja)
```

Ohjelmointiesimerkkitehtävä 2

```
# Tehtava 1: Aja koodi. Miten koodi eroaa aiemmasta koodista?
# Tehtava 2: Miten lahdekoodia pitää muuttaa, että saat laskettua
# vieläkin tarkemman ketjumurtolukuesityksen piille?
# Lisätehtävä: Miten toteutat vastaavan toteutuksen while-silmukalla?
# Pohdintätehtävä: Mita rajoituksia toteutuksessa on?
# Entä mita oletuksia?

import math

def kertoimetListaan(a, b):
    if b == 0:
        return a
    else:
        kertoimet.append(a//b)
        return kertoimetListaan(b, a%b)

# Paaohjelma
kohdeluku = math.pi
tarkkuus = 15

# Muodostetaan operoitava murtoluku:
osoittaja = round(kohdeluku, tarkkuus)*10**tarkkuus
nimittaja = 10**tarkkuus

kertoimet = []
kertoimetListaan(osoittaja, nimittaja)
print("Ketjumurtoluvun_kertoimet:", kertoimet)
```

Opettajan esimerkkiratkaisut:

Tehtävä 1 esimerkkiratkaisu: Laske. Minkä luvun saat?

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

Tehtävä 2 esimerkkiratkaisu: Laske seuraava ketjumurtoesitys auki. Minkä luvun saat?

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{4}{3}}} = 1 + \frac{1}{\frac{7}{3}} = 1 + \frac{3}{7} = \frac{10}{7}$$

Tehtävä 3 esimerkkiratkaisu:

$$3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1}}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16}} = 3 + \frac{1}{\frac{113}{16}} = \frac{355}{113} \approx 3,14159 \approx \pi$$

Lisätehtävä 4 esimerkkiratkaisu:

$$\frac{43}{30} = 1 + \frac{13}{30} = 1 + \frac{1}{\frac{30}{13}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{4}{13}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{13}{4}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}$$

Tehtävä 6 Esitä ketjumurtoesityksenä luku $\frac{91}{53}$ käyttäen Eukleideen algoritmia

Ratkaisu:

$$91 = 1 \cdot 53 + 38$$

$$53 = 1 \cdot 38 + 15$$

$$38 = 2 \cdot 15 + 8$$

$$15 = 1 \cdot 8 + 7$$

$$8 = 1 \cdot 7 + 1$$

$$7 = 7 \cdot 1 + 0$$

$$\frac{91}{53} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7}}}}}$$

Tehtävä 7 Esitä $\sqrt{2}$ yksinkertaisena ketjumurtoesityksenä.

Ratkaisu:

Huomataan ensin, että on $1^2 = 1 < 2$ ja $2^2 = 4 > 2$. Täten on $1 < \sqrt{2} < 2$, ja luvun $\sqrt{2}$ kokonaisosa on 1. Vastaavaa ideaa toistamalla saadaan

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 1 + \sqrt{2} - 1 = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2} - 1}} = 1 + \frac{1}{\frac{(\sqrt{2} + 1) \cdot 1}{(\sqrt{2} + 1) \cdot (\sqrt{2} - 1)}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2} - 1 + 1} = 1 + \frac{1}{2 + \sqrt{2} - 1} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}} \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \sqrt{2} - 1 + 1}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \sqrt{2} - 1}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}}} \quad \text{jne.} \end{aligned}$$

Menetelmää voidaan jatkaa muokkaamalla lauseke $\sqrt{2} + 1$ muotoon $2 + \sqrt{2} - 1$, josta saadaan jälleen $2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$. Siis luvun $\sqrt{2}$ yksinkertaisessa ketjumurtoesityksessä esiintyy ensin luku 1 ja sitten aina lukuja 2.