MURTOLUVUN JA DESIMAALILUVUN YHTEYS

Tekijät: Onni Hinkkanen, Emma Leppälä, Pauli Pauna, Ville Saarikivi, Erkko Saviaro, Elisa Särkelä, Tarja Tapio

Laadittu keväällä 2023.

Kohderyhmä: Yläkoulu (oppitunnille tai helpoksi aiheeksi matematiikkakerhoon), lukion alkuvaihe (oppitunnille)

Esitiedot: Alakoulun matematiikan sisällöt, erityisesti allekkain jakaminen. Kun muutetaan päättymättömiä desimaalilukuja murtoluvuiksi, tarvitaan myös ensimmäisen asteen yhtälöiden ratkaisutaito sekä jos jakso ei ala desimaalipilkusta, niin yhtälöiden vähennyslasku.

Oppitunnin kesto: 1–2 tuntia

Oppimistavoitteet: Oppitunnin jälkeen opiskelija

- osaa jakaa kokonaislukuja jakokulmassa,
- ymmärtää desimaaliluvun ja murtoluvun yhteyden,
- on vahvistanut osaamistaan kymmenjärjestelmässä ja paikkajärjestelmässä,
- on tutustunut algoritmiseen ajatteluun.

Sisältö:

- Jakokulma
- Murtoluvun muuttaminen desimaaliluvuksi
- Desimaaliluvun muuttaminen murtoluvuksi
  - Päättyvä desimaaliluku
  - Jaksollinen, päättymätön desimaaliluku (jakso alkaa desimaalipilkusta)
  - Jaksollinen, päättymätön desimaaliluku (desimaaleja ennen jaksoja)

Toteutus:

Alakoulussa opittu allekkain jakaminen ei tue paikkajärjestelmän käsitettä, koska vastauksen numerot tulevat oikealle eivätkä ”omalle paikalleen” niin kuin jakokulmassa. Tunnilla tutustutaan jakokulman ja muiden esimerkkien avulla algoritmiseen ajatteluun. Algoritmia voi ajatella matemaattisena kakkureseptinä, jota noudatetaan tarkasti vaihe vaiheelta.

Materiaalista voi räätälöidä luokka-asteelle sopivan laajuuden ja käsittelytavan. Kuhunkin tehtävään voi tutustua pelkästään sopivien esimerkkien kautta tai yksityiskohtaisemmin muodostamalla kuhunkin tilanteeseen sopivan algoritmin. Haastavammat tehtävät on merkitty asteriskilla (*). Viimeisen, haastavimman tapauksen voi jättää tarvittaessa pois.

Algoritmi: Murtoluvun esittäminen desimaalilukuna

Ensimmäisessä esimerkissä tutustutaan jakokulmaan (tulos jaettavan yläpuolella, nk. anglo-amerikkalainen jakokulma, ks. Opperi: Jakolaskuun ymmärrystä.)

Kun desimaaliosa on päättyvä, jakokulman vaiheita "jaa, kerro, vähennä, pudota" toistetaan, kunnes jako menee tasan. Seuraavan tehtävän Kohdissa (d) ja (e) desimaaliosa on päättymätön. Tällöin havaitaan, että jakokulman vaiheet alkavat toistua samanlaisina. Voidaan päätellä, miten desimaaliosa jatkuu, ja jakokulmassa jakaminen voidaan lopettaa (algoritmi pysähtyy).

Tehtävä 1. *Laske allekkain jakamalla ja jakokulmassa*

a) $\dfrac{24}{4}$ *(jako tasan)*

b) $\dfrac{2524}{4}$ *(jako tasan, useampi vaihe)*

c) $\dfrac{131}{4}$ *(päättyvä desimaaliosa)*

d) $\dfrac{7}{3}$ *(yhden mittainen jakso)*

e) $\dfrac{12}{7}$ *(pidempi jakso).*

Tehtävä*. *Keksi kokonaisluvut a ja b, joille $\dfrac{a}{b}$ on*

a) *päättyvä*
b) *jaksollinen.*

Ryhmissä pohditaan tuloksia. Mitä havaintoja ryhmät tekevät? Olennaista olisi huomata, kuinka kaikissa esimerkeissä desimaaliosa joko päättyy tai on jaksollinen.

Tässä kohtaa voidaan esitellä seuraava merkintä jaksolliselle desimaaliluvulle: $0{,}121212\ldots = 0{,}\overline{12}$.

Voiko jokaisen desimaaliluvun esittää murtolukumuodossa? Valmiiksi tuttuja esimerkkejä oppilaille voivat olla ainakin $0{,}5 = \frac{1}{2}$ ja $0{,}\overline{3} = \frac{1}{3}$.

Algoritmi: Päättyvän desimaaliluvun esittäminen murtolukuna

(1) Algoritmi ilman yhtälökäsitettä: Kerrotaan desimaalilukua kymmenellä, sadalla, tuhannella (...) sopivasti niin, että tulokseksi saadaan kokonaisluku. Muodostetaan murtoluku jonka osoittaja on kertolaskun tulos ja nimittäjä kertoja. Tarvittaessa supistetaan.

Esimerkiksi luku 0,124 voidaan muuttaa murtoluvuksi kertomalla se luvulla tuhat. On $1000 \cdot 0{,}124 = 124$. Murtoluvuksi saadaan siis $\frac{124}{1000}$. Supistetaan tämä luvulla neljä, jolloin saadaan $\frac{124}{1000} = \frac{31}{250}$.

(2) Algoritmi yhtälökäsitteen avulla: Merkitään etsittävää murtolukua muuttujalla x. Merkitään x ja annettu desimaaliluku yhtä suuriksi. Kerrotaan yhtälöä puolittain sopivalla kymmenpotenssilla. Jaetaan yhtälö puolittain samalla luvulla. Tarvittaessa supistetaan. Tässä kohtaa ennen supistamista hyvä kiinnittää oppilaiden huomio siihen, että osoittajasta nähdään suuruusluokka, ts. "monesko osa" osoittaja on ts. $\frac{2}{10}$ - kaksi **kymmenesosaa**.

Esimerkki:

$$\begin{aligned} x &= 0{,}2 \quad \| \cdot 10 \\ 10x &= 2 \qquad \| : 10 \\ x &= \frac{2}{10} \\ x &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Tehtävä 2. *Esitä annettu desimaaliluku murtolukuna.*

a) 0,3
b) 1,35

Algoritmi: Jaksollisen, päättymättömän desimaaliluvun esittäminen murtolukuna (jakso alkaa desimaalipilkusta)

Merkitään etsittävää murtolukua muuttujalla x. Merkitään x ja annettu desimaaliluku yhtä suuriksi. Kerrotaan yhtälöä puolittain sopivalla kymmenpotenssilla, joka riippuu jakson pituudesta. Vähennetään yhtälöstä puolittain x. Otetaan x yhteiseksi tekijäksi. Jaetaan puolittain muuttujan x kertojalla.

Otetaan esimerkkinä luvun 0,45454545... esittäminen murtolukumuodossa:

$$\begin{aligned} x &= 0{,}45454545\ldots \quad \| \cdot 100 \\ 100x &= 45{,}454545\ldots \quad \| - 0{,}454545\ldots \\ 100x - 0{,}454545\ldots &= 45{,}454545\cdots - 0{,}454545\ldots \quad \| \text{ muistetaan, että } x = 0{,}454545\ldots \\ 100x - x &= 45 \\ 99x &= 45 \quad \| : 99 \\ x &= \frac{45}{99} \quad \| \text{ supistetaan yksinkertaisimpaan muotoon} \\ x &= \frac{5}{11}. \end{aligned}$$

Tehtävä 3. *Esitä annettu desimaaliluku murtolukuna.*

a) 1,33333...
b) 1,454545...

Algoritmi: Jaksollisen, päättymättömän desimaaliluvun esittäminen murtolukuna (desimaaleja ennen jaksoa)

Merkitään etsittävää murtolukua muuttujalla x. Merkitään x ja annettu desimaaliluku yhtä suuriksi. Kerrotaan yhtälöä puolittain sellaisella kymmenpotenssilla, että koko desimaaliosa on jaksollinen. Muodostetaan toinen yhtälö puolittain kertomalla sellaisella toisella kymmenpotenssilla, että koko desimaaliosa on jaksollinen. Vähennetään yhtälöt toisistaan puolittain[1]. Otetaan x yhteiseksi tekijäksi. Jaetaan puolittain muuttujan x kertojalla.

Esimerkkinä luvun 0,36555555... esittäminen murtolukumuodossa:

Ensimmäinen yhtälö:

$$\begin{aligned} x &= 0{,}36555555\ldots \quad \| \cdot 100 \\ 100x &= 36{,}555555\ldots \end{aligned}$$

Toinen yhtälö:

$$\begin{aligned} x &= 0{,}36555555\ldots \quad \| \cdot 1000 \\ 1000x &= 365{,}555555\ldots \end{aligned}$$

Vähennetään nyt jälkimmäisestä yhtälöstä ensimmäinen yhtälö, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} 1000x - 100x &= 365{,}555555\ldots - 36{,}555555\ldots \\ 900x &= 329 \\ x &= \frac{329}{900}. \end{aligned}$$

Tehtävä 4. *Esitä annettu desimaaliluku murtolukuna.*

a) 1,733333...
b) 2,322454545...

Voidaanko jokainen desimaaliluku esittää murtolukuna?*

Edelliset algoritmit ovat nojanneet mahdollisuuteen muokata luvun desimaaliosa jaksolliseksi. On kuitenkin olemassa lukuja, joille näin ei voi tehdä, esimerkiksi π. Näitä kutsutaan irrationaaliluvuiksi, ja niitä ei voi esittää murtolukuina.

[1] Lisähavainto: Kyseessä on siis kahden yhtälön yhtälöparin ratkaisu.