PARTIELL INTEGRERING

Skapare: Niklas Arppe, Mats Gyllenberg, Joar Jensén och Solveig Wallin

Skapad hösten 2023.

Målgrupp: Gymnasiestuderande (andra eller tredje året)

Förhandsinformation: MAA6 Derivata och MAA7 Integralkalkyl.

Lektionens längd: 75 minuter

Inlärningsmål: Efter lektionen kan de studerande beräkna integraler med hjälp av partiell integrering.

Övriga mål: Studerande har en djupare förståelse i skillnaden mellan att bestämma derivatan och integralen av funktioner.

Studerande är medveten om att för derivering krävs endast formler medan för integrering behövs även andra metoder (partialbråksuppdelning, varibelsubstitution, partiell integrering).

Innehåll: Koppling mellan partiell integrering och produktregeln för derivering.

Partiell integrering av produkten av polynomfunktioner, trigonometriska funktioner, logaritm- och exponentialfunktioner.

Utförande:
Inled lektionen med att låta studerande fundera på följande motiverande exempel:

Exempel 1. Bestäm integralen

$$\int x \sin x \, dx.$$

Till näst ge som ledtråd produktregeln för derivering och låt studerande kort fundera igen.

Sats 1. *Låt f och g vara deriverbara. Då gäller*

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Till följande lägg in de givna funktionera i produktregeln, hyfsa och integrera ledvis.

Exempel 1, lösning: Låt $f(x) = x$ och $g'(x) = \sin x$. Då gäller $f'(x) = 1$ och $g(x) = -\cos x$. Enligt produktregeln så har vi nu att

$$f(x)g'(x) + f'(x)g(x) = (fg)'(x) \Leftrightarrow f(x)g'(x) = (fg)'(x) - f'(x)g(x).$$

Således erhåller vi att

$$x \sin x = D(-x \cos x) + \cos x.$$

Om vi integrerar ledvis så gäller

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C$$

där C är en konstant.

Partiell integrering baserar sig på derivering av produkten av funktioner. Låt f och g vara deriverbara funktioner och anta att deras derivator är kontinuerliga (vilket gäller i praktiken alla bekanta funktioner). Med stöd av kända deriveringsregeln för en produkt är

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Eftersom funktionerna är deriverbara, så följer det att de är kontinuerliga. Således är produkten av funktionerna och derivatorna kontinuerliga, eftersom derivatorna är kontinuerliga, alltså är de även integrerbara. Integrering ledvis erhåller

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx,$$

varefter vi genom att omorganisera termerna får

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx,$$

som vi såg i exempel 1.
Vi formulerar resultatet ovan till följande sats.

Sats 2. *Låt f och g vara deriverbara och anta att derivatorna f' och g' är kontinuerliga. Då gäller*

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

Partiell integrering kan användas bland annat när vi vill integrera en produkt av ett polynom och en trigonometrisk funktioner, en exponentialfunktion eller en logaritmfunktion.

Exempel 2. Bestäm $\int \ln x\,dx$.

Låt $f(x) = \ln x$ och $g'(x) = 1$, alltså är $f'(x) = \frac{1}{x}$ och $g(x) = x$. Märk att $\ln x = 1 \cdot \ln x$, varmed vi erhåller att

$$\begin{aligned}\int \ln x\,dx &= \int 1 \cdot \ln x\,dx \\ &= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx \\ &= x \ln x - \int 1\,dx \\ &= x \ln x - x + C\end{aligned}$$

där C är en konstant.
Ibland måste vi integrera partiellt två gånger eller mera.

Exempel 3. Bestäm $\int_1^5 (3x^2 - 4)e^x\,dx$.

Nu kan vi använda oss av formeln

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

Låt $f_1(x) = 3x^2 - 4$ och $g_1'(x) = e^x$. Då gäller att $f_1'(x) = 6x$ och $g_1(x) = e^x$, varmed vi erhåller att

$$\int_1^5 (3x^2 - 4)e^x\,dx = \Big/_1^5 (3x^2 - 4) \cdot e^x - \int_1^5 6xe^x\,dx.$$

Nu måste vi integrera partiellt en gång till eftersom vi har $6x$ innan e^x och vi inte vet vad $\int (6xe^x)\,dx$ är.

Låt $f_2(x) = 6x$ och $g_2'(x) = e^x$. Då gäller att $f_2'(x) = 6$ och $g_2(x) = e^x$, varmed vi erhåller att

$$\begin{aligned}
&\Big/_1^5 (3x^2-4)\cdot e^x - \int_1^5 6xe^x\,dx,\\
=&(3\cdot 5^2-4)\cdot e^5 - (3\cdot 1^2-4)\cdot e^1) - \left(\Big/_1^5 6xe^x - \int_1^5 6e^x\,dx\right)\\
=&71e^5 + e - \left((6\cdot 5\cdot e^5 - 6\cdot 1\cdot e^1) - 6\Big/_1^5 e^x\right)\\
=&71e^5 + e - ((30e^5 - 6e) - 6(e^5 - e^1))\\
=&71e^5 + e - 30e^5 + 6e + 6e^5 - 6e\\
=&47e^5 + e.
\end{aligned}$$

När integranden är en produkt av en exponentialfunktion och en trigonometrisk funktion eller en produkt av två trigonometriska funktioner kan vi göra som i följande exempel.

Exempel 4. Bestäm $\int e^x \sin x\,dx$.

Kom ihåg att vi har

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

Låt $f_1(x) = e^x$ och $g_1'(x) = \sin x$. Då gäller att $f_1'(x) = e^x$ och $g_1(x) = -\cos x$, varmed vi erhåller att

$$\begin{aligned}
\int e^x \sin x\,dx &= e^x\cdot(-\cos x) - \int e^x\cdot(-\cos x)\,dx\\
&= -e^x\cos x + \int e^x\cdot\cos x\,dx.
\end{aligned}$$

Men nu har vi $\int e^x\cdot\cos x\,dx$ och vi vet inte vad den är. Men vi kommer ihåg att $(\cos x)' = -\sin x$ som vi hade tidigare med e^x. Därför integrerar vi igen.

Låt $f_2(x) = e^x$ och $g_2'(x) = \cos x$. Då gäller att $f_2'(x) = e^x$ och $g_2(x) = \sin x$, varmed vi erhåller att

$$\int e^x \sin x\,dx = -e^x\cos x + e^x\cdot\sin x - \int e^x\cdot\sin x\,dx.$$

Vi har nu samma integral i båda leden. Vi adderar

$$\int e^x\cdot\sin x dx$$

till båda leden och får

$$2\cdot\int e^x\sin x\,dx = -e^x\cos x + e^x\cdot\sin x + C_1 \Leftrightarrow \int e^x\sin x\,dx = -\frac{1}{2}e^x\cos x + \frac{1}{2}e^x\sin x + C.$$

Uppgifter:

Uppgift 1. Bestäm $\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$.

Uppgift 2. Bestäm $\int (3x-4)\ln\frac{x}{5}\,dx$.

Uppgift 3. Bestäm $\int x^4\ln x\,dx$.

Uppgift 4.

(a) Bestäm $\int \sin x\cos x\,dx$ med hjälp av identiteten $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$.

(b) Bestäm $\int \sin x\cos x\,dx$ med partiell integrering.

Uppgift 5. Bestäm $\int \sin^2 x\,dx$.

Uppgift 6. Låt $h\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ vara två gånger deriverbar och $h(a) = h(b) = 0$. Visa att

$$\int_a^b (x-a)(b-x)h''(x)\,dx = -2\int_a^b h(x)\,dx.$$

(Tips: låt $f(x) = (x-a)(b-x), g'(x) = h''(x)$ och tillämpa satsen för partiell integrering två gånger.)

Lösningar till uppgifter:

(1) Låt $f(x) = x$ och $g(x) = \tan x$. Alltså är $f'(x) = 1$ och $g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. Nu erhåller vi

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x} dx &= \int_0^{\pi/4} f(x)g'(x)\,dx = \Big/_0^{\pi/4} f(x)g(x) - \int_0^{\pi/4} f(x)'g(x)\,dx \\
&= \Big/_0^{\pi/4} x\tan x - \int_0^{\pi/4} \tan x\,dx \\
&= \Big/_0^{\pi/4} x\tan x + \Big/_0^{\pi/4} \ln\cos x \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}.
\end{aligned}$$

(2) Låt $f(x) = \ln\frac{x}{5}$ och $g'(x) = 3x - 4$. Då gäller $f'(x) = \frac{1}{\frac{x}{5}} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{x}$ och $g(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4x$. Genom att använda partiell integrering så erhåller vi att

$$\begin{aligned}
\int (3x-4)\ln\frac{x}{5}\,dx = \left(\frac{3}{2}x^2 - 4x\right)\ln\frac{x}{5} - \int \left(\frac{3}{2}x^2 - 4x\right)\cdot\frac{1}{x}\,dx \quad &= \left(\frac{3}{2}x^2 - 4x\right)\ln\frac{x}{5} - \int\left(\frac{3}{2}x - 4\right)dx \\
&= \left(\frac{3}{2}x^2 - 4x\right)\ln\frac{x}{5} - \left(\frac{3}{4}x^2 - 4x\right) + C \\
&= \left(\frac{3}{2}x^2 - 4x\right)\ln\frac{x}{5} - \frac{3}{4}x^2 + 4x + C.
\end{aligned}$$

(3) Låt $f(x) = \ln x$ och $g(x) = \frac{x^5}{5}$. Alltså är $f'(x) = \frac{1}{x}$ och $g'(x) = x^4$. Nu erhåller vi

$$\begin{aligned}
\int x^4 \ln x\,dx &= \int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \\
&= \frac{x^5}{5}\ln x - \int \frac{1}{x}\frac{x^5}{5}\,dx \\
&= \frac{x^5}{5}\ln x - \frac{1}{5}\int x^4\,dx \\
&= \frac{x^5}{5}\ln x - \frac{x^5}{25} + C \\
&= \frac{x^5}{25}(5\ln x - 1) + C.
\end{aligned}$$

(4) (a) Märk att

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x \Leftrightarrow \sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Nu erhåller vi att

$$\int \sin x\cos x\,dx = \int \frac{1}{2}\sin 2x\,dx = \frac{1}{4}\int 2\sin 2x\,dx.$$

Nu kan vi använda oss av formeln $\int g'(x)f'(g(x))\,dx = f(g(x)) + C$ och erhåller då att

$$\frac{1}{4}\int 2\sin 2x\,dx = \frac{1}{4}\left(-\cos 2x + C_1\right) = -\frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

(b) Låt $f(x) = \sin x$ och $g'(x) = \cos x$. Alltså är $f'(x) = \cos x$ och $g(x) = \sin x$. Nu erhåller vi med partiell integrering att

$$\begin{aligned}
&\int \sin x\cos x\,dx = \sin^2 x - \int \cos x\sin x\,dx \\
\Leftrightarrow\, &2\int \sin x\cos x\,dx = \sin^2 x + C_1 \\
\Leftrightarrow\, &\int \sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + C.
\end{aligned}$$

(5) Låt $f(x) = \sin x$ och $g(x) = -\cos x$. Alltså är $f'(x) = \cos x$ och $g'(x) = \sin x$. Nu erhåller vi

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x\,dx = \int f(x)g'(x)\,dx &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \\
&= -\sin x \cos x - \int -\cos^2 x\,dx \\
&= -\sin x \cos x - \int \sin^2 x - 1\,dx \\
&= -\sin x \cos x - \left(\int \sin^2 x\,dx - \int 1\,dx\right) \\
&= x - \sin x \cos x - \int \sin^2 x\,dx.
\end{aligned}$$

Märk nu vi genom att omorganisera termerna erhåller

$$2\int \sin^2 x\,dx = x - \sin x \cos x + C_1,$$

alltså

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C.$$

(6) Låt $f(x) = (x-a)(b-x)$ och $g'(x) = h''(x)$. Alltså är $f'(x) = -2x + a + b$ och $g(x) = h'(x)$. Nu erhåller vi

$$\begin{aligned}
\int_a^b (x-a)(b-x)h''(x)\,dx &= \Big/_{\!a}^{b} (x-a)(b-x)h'(x) - \int_a^b (-2x+a+b)h'(x)\,dx \\
&= -\int_a^b (-2x+a+b)h'(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Låt nu $u(x) = -2x + a + b$ och $v'(x) = h'(x)$. Alltså är $u'(x) = -2$ och $v(x) = h(x)$. Nu erhåller vi

$$\begin{aligned}
-\int_a^b (-2x+a+b)h'(x)\,dx &= -\left(\Big/_{\!a}^{b} (-2x+a+b)h(x) - \int_a^b -2h(x)\,dx\right) \\
&= -2\int_a^b h(x)\,dx - ((-2b+a+b)h(b) - (-2a+a+b)h(a)) \\
&= -2\int_a^b h(x)\,dx,
\end{aligned}$$

alltså är

$$\int_a^b (x-a)(b-x)h''(x)\,dx = -2\int_a^b h(x)\,dx.$$