HUUTOKAUPOISTA

A. Huutokaupat ovat tärkeitä ainakin kolmesta syystä

1. Valtava määrä taloudellisia transaktioita tapahtuu huutokauppojen välityksellä.

2. Huutokauppapelejä voidaan käyttää taloustieteen teorioiden empiiriseen testaukseen.

3. Huutokaupat ovat teoreettisesti merkittäviä, koska monet taloustieteen standardimallit voidaan tulkita huutokaupoiksi ja lisäksi huutokaupat ovat yksi teoria hinnanmuodostuksesta.

B. Yhden objektin myynti

Myyjällä on objekti, jonka hän haluaa myydä.

Ostaja haluaa ostaa objektin.

Molemmat riskineutraaleja.

Myyjän arvostus nolla ja ostajan arvostus $v > 0$.

Tämä on julkista tietoa.

Millä hinnalla ostaja ostaa objektin, jos ylipäänsä ostaa?

Tähän ei löydy vastausta, jollei tilannetta malliteta tarkasti.

Myyjä tekee tarjouksen, jonka ostaja hyväksyy tai hylkää.

Myyjän tarjous eli hinta p.

Jos $p > v$ ostaja ei suostu kauppaan ja jos $p < v$ ostaja suostuu kauppaan.

Myyjän paras tarjous on $p = v$; ennustus tulemasta.

Kaksi ostajaa, arvostukset v_1 ja v_2 missä $v_1 < v_2$.

Ennustus $p = v_2$.

Mitä tapahtuu, jos ostajat tekevät tarjoukset myyjälle?

Kun ostajia on yksi tarjous on lähellä nollaa.

Jos ostajia on kaksi, myyjä hyväksyy korkeimman tarjouksen joka on vähän enemmän kuin v_1.

Edellä informaatio oli täydellistä ja jokainen mekanismi/kaupankäyntitapa johti tehokkaaseen tulemaan.

C. Epätäydellinen informaatio

Kaikki tietävät myyjän arvostuksen, joka on nolla.

Ostajien arvostukset ovat yksityistä informaatiota.

Kaikilla on odotukset toisten arvostuksista.

Kaikki ajattelevat muiden arvostusten määräytyvän satunnaisesti jostain todennäköisyysjakaumasta.

Olkoon arvostus tasajakautunut välillä $[a, A]$.

Tasajakauman tiheysfunktio on $f(x) = \frac{1}{A-a}$ kun $a < x < A$ ja nolla muulloin.

Tasajakauman kertymäfunktio on $F(x) = \frac{x-a}{A-a}$ kun $a < x < A$, $F(x) = 0$ kun $x \leq a$ ja $F(x) = 1$ kun $x \geq A$.

Tasajakauman odotusarvo on

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)dt = \frac{1}{A-a}\int_a^A tdt = \frac{1}{A-a}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_a^A = \frac{1}{2}(a+A)$$

Ostajien arvostus tasajakautunut välillä $[0, A]$.

Kun on vain yksi ostaja myyjä tekee tarjouksen q.

Myyjä maksimoi lauseketta

$$\Pr(v < q)\,0 + (1 - \Pr(v < q))\,q = \left(1 - \frac{q}{A}\right) q$$

Tämän ongelman ensimmäisen kertaluvun ehto on

$$1 - 2\frac{q}{A} = 0$$

mistä saadaan optimaalinen

$$q^* = \frac{A}{2}$$

Myyjän odotettu hyöty on $\frac{A}{4}$.

Tilanne ei ole tehokas.

Yhden ostajan huutokaupassa ostaja tarjoaisi nollan verran ja saisi objektin ja myyjän odotettu hyöty olisi nolla.

Ostajia on kaksi ja myyjä tekee tarjouksen q.

Myyjän ongelma on

$$\max_q \Pr\left(v_1, v_2 < q\right) 0 + \left(1 - \Pr\left(v_1, v_2 < q\right)\right) q$$

joka on ekvivalentti seuraavan lausekkeen kanssa

$$\max_q \left(1 - \left(\frac{q}{A}\right)^2\right) q$$

Tämän ongelman ensimmäisen kertaluvun ehto on

$$1 - 3\frac{q^2}{A^2} = 0$$

mistä saadaan optimaalinen

$$q^* = \frac{A}{\sqrt[2]{3}}$$

Myyjän odotettu hyöty on $\frac{2}{3}\frac{A}{\sqrt[2]{3}}$.

Arvataan, että jos ostajia on n kappaletta myyjän optimitarjous on

$q^* = \frac{A}{\sqrt[n]{n+1}}$ ja odotettu hyöty $\frac{n}{n+1}\frac{A}{\sqrt[n]{n+1}}$.

Jos myyjä pitää huutokaupan, kun ostajia on kaksi, tilanne on monimutkaisempi. Ostajien arvostukset v_1 ja v_2.

Olkoon $m_1 = \min(v_1, v_2)$ ja $m_2 = \max(v_1, v_2)$.

Huutokaupassa myyjä odottaa saavansa m_1.

Tämän odotusarvo on

$$E(m_1) = \int_0^A 2m\frac{1}{A}\left(1 - \frac{m}{A}\right) dm = \frac{1}{3}A$$

On helppo nähdä, että myyjän odotettu hyöty on suurempi, kun hän tekee tarjouksen q^* kuin huutokaupassa.

Miksi sitten huutokauppaa käytetään?

Mitä tapahtuu kun huutokaupassa on n ostajaa?

Ostajien arvostukset ovat $v_1, ..., v_n$ ja vastaavat järjestetyt arvostukset

$m_1, ..., m_{n-1}, m_n$, missä tärkeä on toiseksi korkein arvostus m_{n-1}.

Nyt myyjän odotettu hyöty on

$$E(m_{n-1}) = \int_0^A n(n-1)m\frac{1}{A}\left(1 - \frac{m}{A}\right)\left(\frac{m}{A}\right)^{n-2} dm = \frac{n-1}{n+1}A$$

On helppo tarkistaa, että kun ostajia on kolme tai enemmän huutokauppa tuottaa myyjälle suuremman hyödyn kuin optimaalinen ota-tai-jätä-tarjous.

E. Tavanomaisia huutokauppoja

Tapana on pitää tavanomaisina huutokauppamuotoina englantilaista huutokauppaa, hollantilaista huutokauppaa, first price sealed bid huutokauppaa (fpsb) ja Vickrey-huutokauppaa eli second price sealed bid huutokauppaa (spsb). Näissä oletetaan myyjän tarjoavan kaupan tasan yhden jakamattoman hyödykkeen.

Hollantilainen ja fpsb-huutokauppa ovat strategisessa mielessä ekvivalentit.

Englantilaisessa huutokaupassa dominoiva strategia on jatkaa tarjousten tekemistä kunnes tarjoukset ylittävät ostajan arvostuksen. Tällöin objekti myydään hinnalla, joka on sama kuin toiseksi korkein arvostus. Spsb:ssä taas dominoiva strategia on tarjota täsmälleen oman arvostuksensa verran.

Teknisesti vaativahkoa on määrätä tasapainostrategiat fpsb-huutokaupassa. Ennen kuin syvennytään tähän mainittakoon yksi tärkeimmistä huutokauppateorian tuloksista.

Teoreema (Revenue equivalence). Olkoot ostajat riskineutraaleja ja kunkin arvostus yksityistä informaatiota ja riippumattomasti samasta nousevasta ja atomittomasta jakaumasta määräytynyt. Tällöin kaikki huutokaupat (myyntimekanismit), joissa i) objekti päätyy aina ostajalle jonka arvostus on korkein, ja ii) ostaja jolla on alhaisin mahdollinen arvostus saa nollan verran hyötyä, tuottavat odotusarvomielessä saman verran tuloa (hyötyä) myyjälle.

Tämän teoreeman perusteella näyttää siltä, että on yhdentekevää mitä neljästä edellisestä huutokaupasta myyjä käyttää.

Miksi sitten jotkut huutokaupat näyttävät olevan suositumpia kuin toiset.

Riskinkaihtamisen aste, kolluusion mahdollisuudet, sitoutuminen, arvostusten epäsymmetrisyys, yksityiset ja riippumattomat arvostukset eivät päde.

Johdetaan optimistrategia fpsb-huutokaupassa.

Kaikki n ostajaa käyttävät samaa tarjousstrategiaa $b(v)$.

Arvostukset määräytyvät jakaumasta F.

Olkoon b jatkuva ja aidosti kasvava funktio.

Tarkastellaan ostajaa i jonka arvostus on v ja tarjoaa b^*.

Olkoon v^* se arvostus joka johtaisi tarjoukseen b^* tasapainossa eli $b^* = b(v^*)$.

Ostaja i saa objektin todennäköisyydellä $(F(v^*))^{n-1}$.

Odotettu hyöty on $T(v, v^*) = (v - b(v^*))(F(v^*))^{n-1}$.

Ensimmäisen kertaluvun ehto on

$$\frac{\partial T(v, v^*)}{\partial v^*} =$$

$$-b'(v^*)(F(v^*))^{n-1} + (v - b(v^*))(n-1)(F(v^*))^{n-2} f(v^*) = 0$$

Tasapainossa $v^* = v$.

Tasapainotarjousfunktio toteuttaa ehdon

$$b'(v) = (v - b(v))(n-1)\frac{f(v)}{F(v)}$$

Tasajakauman välillä $[0, A]$ tapauksessa tämä on helpohko differentiaaliyhtälö

$b'(v) = (v - b(v))(n-1)\frac{1}{v}$ alkuarvolla $b(0) = 0$.

Tämä voidaan ratkaista esimerkiksi kertomalla molemmat puolet integroivalla tekijällä $\mu = \exp\left(\int \frac{n-1}{v} dv\right) = v^{n-1}$.

Tulokseksi saadaan

$$b(v) = \frac{n-1}{n} v$$

Tästä nähdään heti, että mitä enemmän ostajia sitä vähemmän ylijäämää huutokaupan voittaja saa.

Vastaavasti myyjän tulot kasvavat ostajien määrän lisääntyessä.

F. Voittajan kirous

Ostajien arvostukset ovat positiivisesti toisistaan riippuvaiset, mutta ostajat eivät tiedä täsmälleen arvostuksiaan.

Jos ostajat eivät tajua tätä, huutokaupan voittaa se, jonka arvio on optimistisen eli se joka on kaikkein eniten yliarvioinut myytävän objektin arvon.

Sunnuntain HS:ssä (2008) on juttu huutokaupoista. Sieltä löydämme seuraavan kirjoituksen pätkän: Miten voittajan kirouksen voi välttää, siihen ei professorikaan (Jyrki Wallenius, HKKK) osaa antaa yksiselitteistä vastausta: "Huutokaupan voittaa aina optimisti - se, joka uskoo tuotteen olevan itselleen kaikkein arvokkain".

Esimerkki (ostajilla sama arvostus).

Ostajia on n kappaletta ja he saavat signaalin t_i ja heidän arvostuksensa on $v_i = \alpha t_i + \beta \sum_{j \neq i} t_j$, $\alpha \geq \beta$.

Olkoon $t_{(j)}$ j:nneksi matalin arvostus (j's order statistic), jolloin siis $t_{(1)}$ on alin ja $t_{(n)}$ on korkein arvostus.

Tarkastellaan englantilaista huutokauppaa.

Pelaaja vetäytyy pelistä, kun hän on indifferentti vetäytymisen ja voittamisen välillä. Ensimmäinen vetäytyminen tapahtuu hinnalla $(\alpha + \beta(n-1))\, t_{(1)}$, sillä tämä olisi objektin todellinen arvo, jos kaikkien signaalit olisivat $t_{(1)}$.

Jos nimittäin signaalin $t_{(1)}$ saanut odottaisi korkeampaa hintaa ja voittaisi hinnalla $\left(t_{(1)} + \varepsilon\right)(\alpha + \beta(n-1))$ hän päättelisi, että $t_{(n)} = t_{(1)} + \varepsilon$.

Niinpä objektin arvo hänelle olisi enintään $\alpha t_{(1)} + (n-1)\beta\left(t_{(1)} + \varepsilon\right)$.

Loput ostajista havaitsevat, että yksi heistä on vetäytynyt ja seuraava vetäytyminen tapahtuu hinnalla $\beta t_{(1)} + (\alpha + (n-2)\beta)\, t_{(2)}$, koska tämä olisi vetäytyjän arvostus jos kaikki muut vetäytyisivät samaan aikaan.

Tätä logiikkaa noudattaen viimeinen henkilö vetäytyy, kun hinta on

$$p^* = \beta \sum_{j=1}^{n-2} t_{(j)} + (\alpha + \beta) t_{(n-1)}$$

Tämä on todella tasapaino, koska jos ostaja jonka arvostus on $t_{(n-1)}$ odottaisi ja voittaisi objektin korkeammalla hinnalla, sanotaan vaikka hinnalla $p^* + (\alpha + \beta)\varepsilon$ hän päättelisi, että $t_{(n)} = t_{(n-1)} + \varepsilon$.

Tällöin objektin arvo hänelle olisi

$$\alpha t_{(n-1)} + \beta \sum_{j=1}^{n-2} t_{(j)} + \beta(t_{(n-1)} + \varepsilon)$$

Toisaalta, jos hän lopettaisi kun hinta on alhaisempi, vaikkapa $p^* - (\alpha + \beta)\varepsilon$ hän tietäisi että viimeisen kilpailijan signaali on ainakin $t_{(n-1)} - \varepsilon$.

Tällöin objektin arvo hänelle olisi vähintään $p^* - \beta\varepsilon$ eli korkeampi kuin nykyinen hinta.

Näissä esimerkeissä on tärkeää huomata, että toisin kuin yksityisten arvostusten tapauksessa pelaajat vetäytyvät pelistä, kun he tietävät että hinta on alhaisempi kuin objektin arvo (odotusarvomielessä).

Mutta heille relevantti objektin arvo on ehdolla, että he voittavat ja sen takia tarjouksia sopeutetaan alaspäin (shading).