Sekastrategia ja Nash-tasapainon määrääminen

May 24, 2016

Sekastrategia

- Monissa peleissä ei ole Nash-tasapainoa puhtaissa strategioissa

	H	T
H	$1,-1$	$-1,1$
T	$-1,1$	$1,-1$

- Ratkaisu ongelmaan löytyy siitä, että laajennetaan strategiat käsittämään todennäköisyysjakaumat yli pelin valintojen.
- Edellisessä pelissä pelaajien valintajoukot ovat $S_1 = S_2 = \{p : p \in [0,1]\}$ ja tulkinta on, että p on todennäköisyys valita H ja $1-p$ on todennäköisyys valita T.
- Jos pelaajan valintojen joukko on $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ niin vastaava todennäköisyysjakaumien joukko on $S = \{p_1, p_2, ..., p_n : \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,\ p_i \geq 0\}$ ja tulkinta on, että teko a_i valitaan todennäköisyydellä p_i.
- Näitä todennäköisyysjakaumia sanotaan sekastrategioiksi.

Sekastrategia

- Sekastrategioiden hyväksymisestä seuraa joitakin ongelmia.
- Yksi on se, miten pitäisi arvioida omasta valinnasta seuraava hyöty, jos vastapuoli käyttää sekastrategiaa.
- Tähän tarjoaa vastauksen von Neumann-Morgensternin odotetun hyödyn teoreema.
- Oletamme, että pelaajilla on odotetun hyödyn mukainen hyötyfunktio ja kaikki tulemiin liittyvät hyödyt ja maksut on ilmoitettu von Neumann-Morgenstern hyöty-yksiköissä.
- Jos tällainen talousyksikkö osallistuu arpajaiseen $q = (q_1, q_2, ..., q_n)$, jossa todennäköisyydellä q_i voittaa palkinnon a_i hänen hyötynsä saadaan lausekkeesta $U(q) = \sum_{i=1}^{n} q(a_i)u(a_i) = \sum_{i=1}^{n} q_i u(a_i)$, missä $u(a_i)$ kertoo palkinnosta a_i saatavan välittömän hyödyn.
- u on niin sanottu Bernoulli-hyötyfunktio ja U von Neumann-Morgenstern hyötyfunktio.

Definition

Tarkastellaan normaalimuodon peliä
$\Gamma = \left\{N, \{A_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N}\right\}$.
Sen sekoitettu ekstensio on normaalimuodon peli, jossa kunkin pelaajan i valintajoukko on $S_i = \left\{p : \int_{A_i} dp = 1\right\}$.

Definition

Tarkastellaan normaalimuodon peliä $\Gamma = \left\{N, \{A_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N}\right\}$ ja sen sekoitettua ekstensiota $\Gamma^{me} = \left\{N, \{S_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N}\right\}$.
Nash-tasapaino on strategiavektori $s^* = (s_1^*, s_2^*, ..., s_n^*)$ siten, että kullekin pelaajalle $i \in N$ $u_i\left(s_i^*, s_{-i}^*\right) \geq u_i\left(s_i, s_{-i}^*\right)$ kaikille $s_i \in S_i$.

Sekastrategia

- Jatkossa emme erottele normaalimuodon peliä ja sen sekoitettua ekstensiota, vaan kun ryhdytään määräämään tasapainoja tarkastellaan myös sekastrategioita.
- Emme myöskään huolellisesti erottele Bernoulli hyötyfunktioita von Neumann-Morgenstern hyötyfunktioista.

Theorem

Jokaisessa äärellisessä normaalimuodon pelissä on Nash-tasapaino (kenties sekastrategioissa).

- Nash-tasapainon määritelmästä huomaamme, että se voidaan määritellä myös optimivastausfunktioiden (best response functions) avulla.

Sekastrategia

Definition

Normaalimuodon pelissä $\Gamma = \left\{N, \{S_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N}\right\}$ pelaajan i optimivastausfunktio on

$$B_i(s_{-i}) = \left\{s_i \in S_i : u_i\left(s_i, s_{-i}\right) \geq u_i\left(s_i', s_{-i}\right)\right\}$$

kaikille $s_i' \in S_i$.
Normaalimuodon pelissä $\Gamma = \left\{N, \{S_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N}\right\}$ strategiaprofiili $s^* \in \times_{i=1}^n S_i$ on Nash-tasapaino joss $s_i^* \in B_i(s_{-i}^*)$ kaikille $i \in N$.

- Nash-tasapaino on siis optimivastausfunktioiden kiintopiste.
- Nyt meillä on riittävästi koneistoa, jotta voimme ryhtyä määräämään tasapainoja useanlaisissa peleissä.

Tasapainon määrääminen

- Tarkastellaan ensin sekastrategiatasapainon määräämistä 2*x*2 pelissä

	L	R
T		
B		

- Oletetaan, että $P1$ käyttää strategiaa $(p, 1-p)$ ja $P2$ strategiaa $(q, 1-q)$.
- Väistämättä $P1:n$ on oltava indifferentti valintojen T ja B välillä.
- Jos hän valitsee T hän odottaa saavansa $qu_1(T, L) + (1-q)u_1(T, R)$.
- Jos hän valitsee B hän odottaa saavansa $qu_1(B, L) + (1-q)u_1(B, R)$.
- Tasapainossa näiden on oltava yhtä suuret $qu_1(T, L) + (1-q)u_1(T, R) = qu_1(B, L) + (1-q)u_1(B, R)$.
- Tästä voidaan ratkaista q.

Tasapainon määrääminen

- Analogisesti saadaan ratkaistua p yhtälöstä $pu_2(T,L)+(1-p)u_2(B,L) = pu_2(T,R)+(1-p)u_2(B,R)$.
- Laitetaan jotain lukuja hyötyfunktioihin:$u_1(T,L) = 3$, $u_1(T,R) = u_1(B,L) = 0$ ja $u_1(B,R) = 1$.
- Nyt q määräytyy yhtälöstä $3q = 1-q$, mistä saadaan $q = \frac{1}{4}$.
- Laitetaan jotain lukuja hyötyfunktioihin:$u_2(T,L) = 1$, $u_2(T,R) = u_2(B,L) = 0$ ja $u_2(B,R) = 3$.
- Nyt p määräytyy yhtälöstä $p = 3(1-p)$, mistä saadaan $p = \frac{3}{4}$.
- Sukupuolten välisessä taistelussa on siis myös sekastrategiatasapaino.
- Jos hyötyluvut ovat $u_1(T,L) = 2$, $u_1(T,R) = 0$, $u_1(B,L) = 3$ ja $u_1(B,R) = 1$ niin q määräytyy yhtälöstä $2p+3(1-p) = (1-p)$, mikä ei voi päteä.
- Siis vangin ongelmassa ei ole sekastrategiatasapainoa.

Tasapainon määrääminen

- Cournot-kilpailussa kaksi yritystä valitsee markkinoille tuomansa määrät samanaikaisesti.
- Yritysten rajakustannukset ovat nolla.
- Markkinoiden käänteinen kysyntäkäyrä on $p = 1 - q$, missä p on hinta ja q markkinoilla oleva tuotteen määrä.
- Yrityksen 1 tavoite on $max_{q_1} (1 - q_1 - q_2)\, q_1$.
- Ensimmäisen kertaluvun ehto on $1 - 2q_1 - q_2 = 0$, mistä ratkaistaan optimivastausfunktio $q_1 = \frac{1-q_2}{2}$.
- Analogisesti saadaan yritykselle 2 optimivastausfunktio $q_2 = \frac{1-q_1}{2}$.
- Näistä kahdesta yhtälöstä saadaan ratkaistua kaksi tuntematonta $q_1 = q_2 = \frac{1}{3}$.

Tasapainon määrääminen

- Epästandardi rahanheittopeli

$$\begin{array}{ccc} & H & T \\ H & 2,-2 & -1,1 \\ T & -3,3 & 2,-2 \end{array}$$

- $P1$:n strategia $(p, 1-p)$ ja $P2$:n strategia $(q, 1-q)$.
- $P1$ on indifferentti H:n ja T:n välillä, jos $2q-(1-q) = -3q+2(1-q)$, mistä saadaan $q = \frac{3}{8}$.
- $P2$ on indifferentti H:n ja T:n välillä, jos $-2p+3(1-p) = p-2(1-p)$, mistä saadaan $p = \frac{5}{8}$.
- $P1$:n odotettu hyöty on $\frac{1}{8}$.

Tasapainon määrääminen

- Huutokauppa, jossa kaikki maksavat.
- Ostajia on n kappaletta, kaikki maksavat huutonsa verran ja voittaja saa V:n arvoisen palkinnon.
- Tarjoamalla b_i ostaja i voittaa palkinnon todennäköisyydellä $p_i = \frac{b_i}{\sum_{k=1}^{n} b_k}$.
- Ostajan i tavoite on

$$\max_{b_i} p_i V - b_i$$

tai yhtäpitävästi

$$\max_{b_i} \frac{b_i}{\sum_{k=1}^{n} b_k} V - b_i$$

Tasapainon määrääminen

- Ensimmäisen kertaluvun ehto on

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} b_k - b_i}{\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^2} V - 1 = 0$$

- Pyritään määräämään symmetrinen tasapaino, jossa $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = b$, ja lykätään tämä tieto edelliseen ehtoon, jolloin saadaan

$$\frac{(n-1)b}{n^2 b^2} V - 1 = 0$$

mistä ratkaistaan

$$b^* = \frac{n-1}{n^2} V$$

- Ostajat käyttävät resursseja $nb^* = \frac{n-1}{n} V$ verran.