Ratkaisuehdotus 2. kurssikokeeseen 14.12.2012

(ratkaisuehdotus päivitetty 23.10.2017)

Huomioitavaa:

- Tässä ratkaisuehdotuksessa olen pyrkinyt mainitsemaan lauseen, johon kulloinenkin päätelmä vetoaa. Näin on helpompi ”jäljittää” teoreettinen perustelu päätelmälle. Varsinaisessa koevastauksessa ei tietenkään edellytetä lauseiden numeroiden muistamista ulkoa, mutta lauseiden sisältö olisi hyvä hallita ja varsinkin keskeiset lauseet* olisi hyvä muistaa ulkoa.

- Derivaatan merkkikaavio nojautuu pohjimmiltaan lauseisiin 4.10 ja 4.25 (sekä mahdollisesti Bolzanon lause 3.40)

- Toisen tehtävän vastauksesta tuli pitkähkö. Esimerkiksi tyyppiä $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}\ ja\ \lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}$ olevat raja-arvot voidaan olettaa tunnetuiksi ilman todistusta (ts. $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}=\infty\ ja\ \lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}=-\infty$).

- Tehtävässä 4 esiintyvää eksponenttifunktiota ei ole vielä käsitelty.

* Esimerkiksi luentomateriaalin lauseet:

Laskulauseet lukujonoille/funktioille (Lause 2.14/Lause 2.35)

”Raja-arvon/jatkuvuuden/derivaatan olemassaolo ja toispuolinen raja-arvo/jatkuvuus/derivaatta” (Lause 2.53/Lause 3.7/3.22)

Kuristusperiaate jonoille/funktioille (Lause 2.20 /Lause 2.44)

”Jatkuva funktio suljetulla välillä” (Lause 3.43)

Väliarvolause (Lause 3.47)

”Derivaatta ja monotonisuus” (4.10)

Ääriarvotesti II (Lause 4.27)

+ Jatkuvuuden todentaminen (Lauseet 3.8 ja 3.11)

1. Määritä funktion $f(x) = x^4 - 2x^3$ lokaalit ääriarvot, kuperuussuunnat ja käännepisteet.

Ratkaisu. Lokaalin ääriarvonkohdan välttämättömänä ehtona derivoituvalle funktiolle on funktion derivaatan häviäminen tässä kohdassa (Lause 4.20). Sillä f on polynomifunktiona kaikkialla derivoituva, tutkitaan siis derivaattafunktion nollakohtia koko määrittelyjoukossa. Olkoot $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \; 4x^3 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(4x - 6) = 0 \Leftrightarrow \; x^2 = 0 \quad tai \;\; 4x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \;\; tai \; x = \frac{3}{2}$$

Olemme saaneet kaksi kandidaattia $x = 0$ ja $x = \frac{3}{2}$ lokaaleiksi ääriarvokohdiksi. Piirretään derivaatan merkkikaavio (laske *f*:n arvo jokaiselta väliltä, tutki etumerkki):

$f'(x)$	- - - - - - - -	- - - - - - - -	+ + + + +
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$x = 0$ $\qquad\qquad$ $x = \frac{3}{2}$

Merkkikaaviosta nähdään, ettei $x = 0$ voi olla lokaali ääriavokohta (Lauseen 4.10 nojalla tiedetään, että f vähenevä pisteen 0 kummassakin toispuolisessa pienessä ympäristössä). Tällöin *f*:n ainoa lokaali ääriarvo on lokaali minimi $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{16}$ (Ääriarvotesti I eli Lause 4.25).

Funktion kuperuussuuntien ja käännepisteiden selvittämiseksi tutkitaan toisen kertaluvun derivaattafunktion käyttäytymistä.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow 12x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow 12x = 0 \;\; tai \; x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \; tai \; x = 1$$

f''	+ + + + + +	- - - - - - -	+ + + + +
$f{:}n\ kuperuus$	$\smile$	$\frown$	$\smile$

$x = 0$ $\qquad\qquad$ $x = 1$

Huomataan, että kohdissa $x = 0$ ja $x = 1$ funktio f'' muuttaa merkkiään. Näin ollen lauseen 4.18 perusteella nämä ovat funktion f käännekohdat. Näitä vastaavat käännepisteet $(0, f(0)) = (0,0)$ ja $(1, f(1)) = (1, -1)$.

Funktio *f* kuperuussuunnat nähdään kaaviosta, mutta vielä tarkemmin lauseen 4.17 nojalla: *f* on vahvasti konveksi väleillä $]-\infty, 0] \;\; ja \;\; [1, \infty[$ ja *f* on vahvasti konkaavi välillä $[0,1]$.

2. Tutki funktion $f(x) = \frac{x}{x^3-1}$ monotonisuutta eri väleillä. Mitä arvoja *f* saa välillä $]-\infty, 1[$? Entä välillä $]1, \infty[$?

Ratkaisu. Huomataan, että *f* on määritelty joukossa $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, joten *f* on rationaalifunktiona jatkuva tässä joukossa. Tutkitaan funktion *f* monotonisuutta derivaattafunktion avulla (erityisesti lause 4.10). Ratkaistaan derivaatan nollakohdat. Olkoot $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

$$f'(x) = \frac{D(x)(x^3-1) - D(x^3-1)x}{(x^3-1)^2} = \frac{x^3 - 1 - 3x^3}{(x^3-1)^2} = -\frac{1+2x^3}{(x^3-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \overset{osoittaja\ nolla}{\Leftrightarrow} \quad 1 + 2x^3 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

Derivaattafunktiolla on vain yksi nollakohta, joten itse funktio voi vaihtaa etumerkkiään enintään kerran (Bolzano). Etumerkin määrää osoittaja $-(1+2x^3)$, sillä nimittäjä on lausekkeessa aina positiivinen. Saadaan:

$$f'(x) \geq 0, kaikilla\ x \leq -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \quad ja \quad f'(x) \leq 0, kaikilla\ x \neq 1\ ja\ x \geq -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

Selvästi f' ei ole vakiofunktio millään määrittelyjoukkonsa välillä. Lauseen 4.10 nojalla *f* on aidosti kasvava välillä $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]$ ja *f* on aidosti vähenevä väleillä $\left[-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, 1\right[$ ja $]1, \infty[$.

Kuvajoukkojen $f(\,]-\infty, 1[\,)\ ja\ f(\,]1, \infty[\,)$ selvittämiseksi tutkitaan funktion arvoja lähestyttäessä pistettä 1 oikealta ja vasemmalta sekä äärettömyyksiä. Olkoot x kyllin iso (esim. $|x| > 1$). Tällöin voidaan muokata *f*:n lauseketta:

$$\frac{x}{x^3-1} = \frac{x^3\frac{1}{x^2}}{x^3\left(1-\frac{1}{x^3}\right)} = \frac{\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^3}} \xrightarrow{x\to\pm\infty} \frac{0}{1 \pm 0} = 0$$

Saadaan siis $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Vielä tulisi selvittää toispuoliset raja-arvot: $\lim_{x\to 1-} f(x) \quad ja \quad \lim_{x\to 1+} f(x)$

Heti nähdään, että raja-arvot eivät ole muotoa ”$\frac{0}{0}$”, vaan ”$\frac{1}{0}$”. Karkeasti arvioiden nimittäjä lähestyy siis nollaa, joten raja-arvot lähestyvät jompaakumpaa äärettömyyttä. Tämän voisi osoittaa vähän tarkemmin:

Oletetaan, että x kuuluu pisteen 1 vasemman- tai oikeanpuoleiseen ympäristöön, joka on kyllin pieni (ts. nolla ei kuulu tähän ympäristöön):

$$\lim_{x\to 1\pm} \frac{x}{x^3-1} = \lim_{x\to 1\pm} \frac{1}{\frac{x^3-1}{x}} = \lim_{x\to 1\pm} (g\circ f)(x), \quad miss\ddot{a}\ g(x) = \frac{1}{x} \ \ ja\ \ f(x) = \frac{x^3-1}{x}$$

$$\lim_{x\to 1-} (g\circ f)(x) \overset{*^1}{=} \lim_{x\to 0-} g(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} \overset{*^2}{=} -\infty \qquad \left(siis\ \lim_{x\to 1-} f(x) = -\infty\right)$$

$$\lim_{x\to 1+} (g\circ f)(x) \overset{*^1}{=} \lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} \overset{*^3}{=} \infty \qquad \left(siis\ \lim_{x\to 1+} f(x) = \infty\right)$$

<u>Yhteenveto</u>: Välillä $]-\infty, 1[$, f:llä ei ole olemassa pienintä arvoa, sillä $\lim_{x\to 1-} f(x) = -\infty$, mutta suurin arvo saavutetaan monotonisuus tarkastelujen nojalla kohdassa $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, joten f:n suurin arvo välillä on $f\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \approx 0{,}53$.

Siten f:n jatkuvuuden nojalla[1]: $f(\,]-\infty, 1[\,) = \left]-\infty, f\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\right]$.

Välillä $]1, \infty[$, f:llä ei ole olemassa suurinta arvoa, sillä $\lim_{x\to 1+} f(x) = \infty$. Koska f on aidosti vähenevä välillä $]1, \infty[$, niin pienintä arvoa $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ ei saavuteta.

Siten f:n jatkuvuuden nojalla: $f(\,]1, \infty[\,) = \,]0, \infty[$.

1. Muotoiltu versio lauseesta 2.56 (Yhdistettyjen funktioiden raja-arvo tosipuolisille raja-arvoille)

2. $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty$. Todistus (Katso ensin määritelmä 2.34(iii)):

$Olkoot\ M > 0.\ Valitaan\ \delta > 0\ siten, että\ \delta = \frac{1}{M} \Leftrightarrow \frac{1}{\delta} = M. Tällöin, pätee:$

$$Jos\ \ 0 < x < \delta, niin\ myös\ pätee\ f(x) = \frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} = M. \quad \square$$

3. $\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$. Todistus (Katso ensin määritelmä 2.34(iv)):

$Olkoot\ m < 0.\ Valitaan\ \delta > 0\ siten, että\ \delta = -\frac{1}{m} \Leftrightarrow -\frac{1}{\delta} = m. Tällöin, pätee:$

$$Jos\ -\delta < x < 0, niin\ myös\ pätee\ f(x) = \frac{1}{x} < -\frac{1}{\delta} = m. \quad \square$$

[1] Tätä ei voi suoraan perustella lauseella 3.43, sillä kyseessä on avoin väli. Yksi mahdollisuus olisi osoittaa tämä Bolzanon lauseeseen perustuvalla tarkastelulla luentomonisteen esimerkin 3.42 tyyliin. Tämä olisi turhan monimutkaista, joten voisi riittää päätellä:
$-\infty = \lim_{x\to -\infty} f(x) < f(x) \le f\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \approx 0{,}53\ kaikilla\ x \in\ ]-\infty, 1[.$
$Koska\ f\ on\ jatkuva, niin\ se\ saa\ kaikki\ arvot\ tältä\ väliltä\ \left]-\infty, f\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\right].$

3. Määritä funktion $f(x) = |x^3| - x^2$ suurin ja pienin arvo välillä $[-1,2]$.

Ratkaisu. Funktio *f* on jatkuva funktio, sillä se on summafunktio kahdesta jatkuvasta funktioista. Tarkemmin: $x \mapsto |x^3|$ on jatkuva yhdistettynä funktiona polynomi ja itseisarvofunktiosta ja $x \mapsto -x^2$ on polynomifunktiona jatkuva. Tällöin (lauseen 3.43 nojalla) *f*:llä on olemassa suurin ja pienin arvo suljetulla välillä $[-1,2]$. Ääriarvot löytyvät välin päätepisteistä, derivaatan nollakohdista tai epäderivoituvuuskohdista.

Itseisarvon määritelmän perusteella $f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2, & kun\ x \geq 0 \\ -x^3 - x^2, & kun\ x \leq 0 \end{cases}$

Ainut mahdollinen kohta, missä *f* ei ole derivoituva on origo. Tämän voisi tarkistaa erotusosamäärää tarkastelemalla*, mutta helpommalla päästään ottamalla origo suoraan mukaan ääriarvo tarkasteluihin. Derivaatan nollakohdat:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x, & kun\ x > 0 \\ -3x^2 - 2x, & kun\ x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 3x^2 - 2x = 0 \\ -3x^2 - 2x = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x(3x-2) = 0 \\ x(-3x-2) = 0 \end{matrix} \overset{x \neq 0}{\Longrightarrow} \begin{matrix} 3x - 2 = 0 \\ -3x - 2 = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2}{3}$$

Ääriarvot löytyvät siis joukosta $\left\{f(-1), f(2), f(0), f\left(\frac{2}{3}\right), f\left(-\frac{2}{3}\right)\right\} =$

$\left\{0,4,0,-\frac{4}{27},-\frac{4}{27}\right\} = \left\{0,4,-\frac{4}{27}\right\}$.

Joukon pienin alkio $-\frac{4}{27}$ on *f*:n pienin arvo kysytyllä välillä ja joukon suurin alkio 4 on *f*:n suurin arvo kysytyllä välillä.

* *f* on itseasiassa derivoituva origossa (Lause 3.22):

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{h^3 - h^2}{h} = \lim_{h\to 0+} h^2 - h = 0$$

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{-h^3 - h^2}{h} = \lim_{h\to 0-} -h^2 - h = 0$$

4. Olkoon $f(x) = e^{-3x}$. Osoita väliarvolauseen avulla, että

$$f(y) - f(x) < 3(x - y),$$

kun $x > y > 0$. Tutki, onko olemassa sellaista vakiota a, että epäyhtälö $f(y) - f(x) < a(x - y)$ pätee aina kun $0 \geq x > y$.

Ratkaisu. Kertaa väliarvolause (Lause 3.47)!

Tehtävän kuvaus on yhdistettykuvaus eksponenttifunktiosta ja polynomifunktiosta. Tämä on koko reaalilukujen joukossa jatkuva ja derivoituva kuvaus. Väliarvolauseen oletukset ovat siis voimassa mielivaltaisella suljetulla välillä.

Olkoot $x > y > 0$. Nyt, väliarvolauseen mukaan on olemassa $\xi \in \,]y, x[$ siten, että

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - f(y) = -3e^{-3\xi}(x - y)$$
$$\Leftrightarrow \quad f(y) - f(x) = 3e^{-3\xi}(x - y)$$

Nyt voidaan arvioida: $f(y) - f(x) = 3\underbrace{e^{-3\xi}}_{\in]0,1[}\underbrace{(x - y)}_{>0} < 3e^{0}(x - y) = 3(x - y)$

Olkoot $0 \geq x > y$. Osoitetaan, että kysyttyä vakiota a ei ole olemassa, hakemalla ristiriita vastaoletuksesta. Oletetaan, että on olemassa $a \in \mathbb{R}$, siten että tehtävän epäyhtälö pätee. Tehdään huomio: $f(y) - f(x) = e^{-3y} - e^{-3x} > 0$ ja toisaalta $(x - y) > 0$, joten tulee olla $a > 0$. Valitaan $x = 0$ ja päätellään:

$$f(y) - f(0) < a(0 - y) \quad \Leftrightarrow \quad e^{-3y} - 1 < -ay \quad \overset{-ay>0}{\Leftrightarrow} \quad \frac{e^{-3y} - 1}{-ay} < 1$$

$$\mathit{Mutta\ epäyhtälön\ vasenpuoli}: \quad \frac{e^{-3y} - 1}{-ay} = \frac{e^{-3y}}{-ay} + \frac{1}{ay} \xrightarrow{y \to -\infty} \infty + 0 = \infty$$

Olemme johtaneet ristiriidan (”$\infty < 1$”), joten vastaoletus epätosi, eli ei ole olemassa vakiota a, jolla tehtävän epäyhtälö pätisi. Huomaa, että raja-arvon ottaminen perustelaan oletuksella siitä, että epäyhtälön tulee päteä kaikilla $y < 0$.

$\mathit{Perustelu\ viimeiseen\ raja-arvoon}$: $\lim_{y \to -\infty}\left(\frac{e^{-3y}}{-ay} + \frac{1}{ay}\right) = \lim_{z \to \infty}\left(\frac{e^{3z}}{az} - \frac{1}{az}\right) \overset{*}{=} \infty - 0 = \infty$

*”Eksponenttifunktio kasvaa oleellisesti nopeammin kuin mikään potenssifunktio.”