3. $(a)$ *Määrittele reaalifunktion $f$ jatkuvuus pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}$.*

$(b)$ *Funktiosta $f$ tiedetään, että* $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-a}-2}{x^2-25}$,

*kun $a < x \neq 5$ ja että $f(5) = b$. Määritä vakiot $a \in \,]-5,5[$ ja $b \in \mathbb{R}$*

*niin, että $f$ on jatkuva pisteessä 5.*

**Ratkaisu.** (a) Luentomateriaali määritelmä 3.1 sivu 45

(b) Jotta f olisi jatkuva pisteessä 5, niin tulee olla $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = f(5)$.

Tämä edellyttää tietenkin raja-arvon olemassaoloa pisteessä 5. Kun x=5, niin lausekkeen $\frac{\sqrt{x-a}-2}{x^2-25}$ nimittäjä on tällöin nolla. Osoittajan tulee olla myös nolla, jotta lauseke ei olisi loppuun asti supistetussa muodossa, ja raja-arvo olisi olemassa.

$$\sqrt{5-a}-2=0 \;\leftrightarrow\; \sqrt{5-a}=2 \;\overset{*}{\leftrightarrow}\; 5-a=4 \;\leftrightarrow\; a=1$$

*Huom $a \in \,]-5,5[$. Tulee valita siis a = 1, jotta raja-arvo olisi ylipäätänsä olemassa.

Lasketaan raja-arvo $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$:

$$\frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25} = \frac{\left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{(x^2-25)\left(\sqrt{x-1}+2\right)} = \frac{x-1-4}{(x^2-5^2)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}$$

$$\frac{x-5}{(x-5)(x+5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)} = \frac{1}{(x+5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}$$

$$\xrightarrow{x\to 5} \frac{1}{(5+5)\left(\sqrt{5-1}+2\right)} = \frac{1}{10\left(\sqrt{4}+2\right)} = \frac{1}{40}$$

Tulee siis olla:

$$\frac{1}{40} = \lim_{x\to 5} f(x) = f(5) = b$$

Funktio f on jatkuva pisteessä 5, kun valitaan $a = 1$ ja $b = \frac{1}{40}$.

# Harjoitustentti I. Mallivastaukset

① Väite: $n^{n-1} \geq n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Todistus. Väite pätee, kun $n = 1$, koska

$$1^{1-1} = 1^0 = 1 \geq 1! = 1.$$

Oletetaan nyt, että väite pätee arvolla $n$. Tällöin arvolla $n+1$ tulisi olla

$$(n+1)^{n+1-1} \geq (n+1)!$$

Nyt

$$(n+1)^{n+1-1} = (n+1)^n = (n+1)(n+1)^{n-1}$$

$$\overset{(1)}{\geq} (n+1)\, n^{n-1} \overset{(2)}{\geq} (n+1)\, n! = (n+1)!$$

Tässä kohdassa (1) sovellettiin tietoa, että $x^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, on kasvava positiivisilla $x$:n arvoilla ja kohdassa (2) käytettiin induktio-oletusta $n^{n-1} \geq n!$.

Induktioperiaatteen nojalla väite on tosi.

$\square$

(3.) a) Tiedetään, että $|f(x)| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
On todistettava $f$ jatkuvaksi origossa.
Ensin huomataan, että $f$:n arvo origossa on

$$|f(0)| \leq |0| = 0 \Rightarrow f(0) = 0.$$

Lisäksi itseisarvon määritelmän perusteella

$$-|x| \leq f(x) \leq |x|$$

Nyt

joten kuristusperiaatteen nojalla täytyy olla

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

Koska tämä on edelleen sama kuin $f(0)$, $f$ on jatkuva origossa.

$\square$

b) Ehdon toteuttaa esimerkiksi funktio

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$