Matemaattisen analyysin tukikurssi

1. Kurssikerta (16.9.2019)

Yleistä

Tukikurssista

- 1. periodi: maanantaisin klo 14:15-15:45 huoneessa SH2 yht. 5 kertaa.
- Tenttiviikolla ei tukikurssia.
- 2. periodin ajat selviää myöhemmin, yht. 7 kertaa.
- Kurssin kotisivu https://blogs.helsinki.fi/kkuuskos/.
- Kurssikertojen rakenne: ensin viikon asioiden kertaus, lopuksi laskarivinkkejä.

Kysymyksien esittäminen suotavaa milloin vain, myös etänä!

Palautelomake + presemo löytyy kotisivulta.

Yliopistomatematiikan opiskelu

Varaa riittävästi aikaa.

Pyri tekemään kaikki laskarit.

Selvitä intuitio yhtälöiden takana.

Älä luovuta.

Lisäapua analyysiin

- Tukikurssimonisteet tukikurssin kotisivulta.
- Khan Academy https://www.khanacademy.org, etenkin Calculus 1 ja 2.
- Googlaa! – ei kopiointiin, vaan inspiraatioon.
- StackExchangen Maths-osio https://math.stackexchange.com
- Edistyneempää? https://www.youtube.com/3blue1brown Essence of Calculus

Laskareiden teko yhdessä!

Apuvälineitä analyysiin

- MAOL-taulukkokirja laskusääntöjä varten
- Symbolinen laskin (esim. TI-Nspire CX CAS)
- Symboliseen laskentaan Symbolab https://www.symbolab.com
- Laajemmin matematiikkaan Wolfram Alpha https://www.wolframalpha.com
- Käppyränpiirtoon Desmos https://www.desmos.com/calculator
- Matriisilaskuihin (tulevilla kursseilla) Matrixcalc https://www.matrixcalc.org/en

HUOM kuitenkin, että tentissä laskimeton, MAOLiton osio!

Tehtävänratkaisusta

Merkitse **aina** käyttämäsi lause, sääntö, aksiooma, aiemmin osoitettu tulos jne.!

Yleisimmissä laskusäännöissä riittänee maininta “tunnettu”, “MAOL” tjsp. Tällainen voisi olla esimerkiksi (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.

Vähänkään erikoisimmissa asioissa kannattaa **aina** viitata materiaalin lauseisiin numerolla. Perusperiaatteena se, että jos lause materiaalista löytyy, viittaa siihen.

Asiat, joita ei kurssin materiaalista löydy tai jotka eivät ole “yleisesti tunnettuja”, **tulee perustella erikseen**. Viittaukset ulkopuoliseen materiaaliin eivät riitä.

Yhtälönratkaisusta

- Pelkkä allekkain kirjoittaminen ei riitä – perustele sanoin tai nuolilla.
- Kaikkea ei voi ratkaista nuolilla!
- Selvä suomen kieli >>> nuolet ja hienot merkit.
- Tavalliset ensimmäisen ja toisen asteen yhtälöt saa ratkaista kuten lukiossa.

Joukko-oppia pikana

JYMin moniste: https://courses.helsinki.fi/sites/default/files/course-material/4540840/JYMmoniste.pdf

Joukko-opin perusteet

Joukko on yksinkertaisesti kokoelma sen jäseniä, eli alkioita.

Esimerkiksi eläinten joukko sisältää lehmän ja kanan, ja matemaatikkojen joukko Leonhard Eulerin ja Okko Kanervan. Jokainen alkio on siis “uniikki”.

Jos alkio x kuuluu joukkoon A, voidaan merkitä: $x \in A$

Joukko voidaan määritellä esimerkiksi:

- Luettelemalla sen jäsenet, järjestyksellä ei väliä $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
- Kertomalla jonkin sääntö, jota alkiot noudattavat $A = \{z \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq z \leq 2\}$
    - Yleisesti sääntö merkitään siis:

      $\{\text{alkioiden tyyppi} \mid \text{ehto, joka alkioilta vaaditaan}\}$

Joukko-oppia: osajoukot

Määritelmä 1.4.1. Joukko A on joukon B *osajoukko*, jos kaikilla $x \in A$ pätee myös $x \in B$. Tällöin sanotaan, että A *sisältyy* joukkoon B, ja merkitään $A \subset B$. Merkintä $A \not\subset B$ tarkoittaa, että A ei ole joukon B osajoukko.

Määritelmä 1.6.1. Joukot A ja B ovat *samat*, jos niissä on täsmälleen samat alkiot eli kaikilla alkioilla x pätee seuraava: $x \in A$, jos ja vain jos $x \in B$. Tällöin merkitään $A = B$.

Joukko-oppia: operaatioita

Määritelmä 1.2.1. Oletetaan, että A ja B ovat joukkoja. Joukkojen A ja B

- *yhdiste* on joukko $A \cup B = \{\, x \mid x \in A \text{ tai } x \in B \,\}$,
- *leikkaus* on joukko $A \cap B = \{\, x \mid x \in A \text{ ja } x \in B \,\}$,
- *erotus* on joukko $A \setminus B = \{\, x \mid x \in A \text{ ja } x \notin B \,\}$.

Merkintä $A \setminus B$ luetaan ”A pois B”.

Määritelmä 1.3.1. *Tyhjä joukko* tarkoittaa joukkoa, jossa ei ole yhtään alkiota. Tyhjää joukkoa merkitään symbolilla $\emptyset$ ja joskus myös merkinnällä $\{\,\}$.

Joukko-oppia: erityisiä lukujoukkoja

Esimerkki A.2 (Erityisiä joukkoja).

$\emptyset =$ joukko, jossa ei ole alkioita, *tyhjä joukko*;

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, luonnolliset luvut;

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, luonnolliset luvut sekä 0:

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, kokonaisluvut;

$\mathbb{Q} = \{\, \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \,\}$, rationaaliluvut

(voidaan ilmaista myös esim. $\{\, x \mid x = \frac{p}{q}$ joillekin $p \in \mathbb{Z}$ ja $q \in \mathbb{Z}$ se. $q \neq 0 \,\}$);

$\mathbb{R}$, reaaliluvut;

$\mathbb{C} = \{\, a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \,\}$, kompleksiluvut (missä i on imaginaariyksikkö: $i^2 = -1$).

Kompleksilukuja ei juurikaan käsitellä taloustieteen kandiohjelmaan sisältyvillä kursseilla, muut kannattaa osata ulkoa. Taulukko peräisin analyysin monisteen liitteestä A.

Joukko-oppia: välien merkitseminen

Määritelmä 1.4.8. Oletetaan, että a ja b ovat reaalilukuja ja $a < b$. Tällöin määritellään avoin väli $]a, b[$, suljettu väli $[a, b]$ sekä puoliavoimet välit $[a, b[$ ja $]a, b]$ seuraavasti:

$$]a, b[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \} \qquad [a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$$

$$[a, b[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \} \qquad]a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \}$$

Joukko-oppia: rajattomat välit

Symbolien ∞ ja $-\infty$ avulla voidaan osoittaa, että väli on rajaton. Rajattomat välit määritellään seuraavasti:

Määritelmä 1.4.9. Oletetaan, että c on reaaliluku. Tällöin

$$]-\infty, c[= \{ x \in \mathbb{R} \mid x < c \} \qquad]c, \infty[= \{ x \in \mathbb{R} \mid x > c \}$$

$$]-\infty, c] = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq c \} \qquad [c, \infty[= \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq c \}$$

Logiikka ja todistustekniikka

Merkintöjä (“loogiset konnektiivit”)

Analyysin kurssimateriaalista:

$$\text{ilmaus “kaikille } x\text{” lyhennetään ‘}\forall x\text{’,} \tag{1.10}$$
$$\text{ilmaus “on olemassa } x\text{” lyhennetään ‘}\exists x\text{’.}$$

$$\text{ilmaus “}p\text{ ja }q\text{” lyhennetään ‘}p \wedge q\text{’,} \tag{1.11}$$
$$\text{ilmaus “}p\text{ tai }q\text{” lyhennetään ‘}p \vee q\text{’.}$$

Implikaatio & ekvivalenssi

Implikaatio:

$$a \Rightarrow b$$

"Jos a, niin b"

"b seuraa a:sta"

"a on riittävä ehto b:lle"

"b on välttämätön ehto a:lle"

Ekvivalenssi:

$$a \Leftrightarrow b$$

"a jos ja vain jos b"

"b seuraa a:sta, ja a seuraa b:stä"

Ole varovainen ekvivalenssien käytössä! Jos ei ole tarvetta käyttää ekvivalenssia, käytä implikaatiota. Jos ekvivalenssia on kuitenkin pakko käyttää, **tarkista että väite pätee molempiin suuntiin!**

Matemaattinen todistaminen

1. Väitteen kumoaminen **vastaesimerkillä**
   - Etsi **yksikin** tapaus, joka on ristiriidassa väitteen kanssa. Tällöin väite on epätosi.
2. “Jos a niin b” -väitteen **suora todistaminen**
   - Oletetaan, että a pätee, ja päätellään esimerkiksi laskusääntöjä ja lauseita käyttäen, että tällöin myös b pätee. Tällöin on osoitettu, että väite on tosi.
3. “Jos a niin b” -väitteen **kontrapositiotodistus**
   - Todista väite “Jos ei b, niin ei a”! Voi vaikuttaa oudolta, mutta perustuu logiikkaan!
4. “a jos ja vain jos b” -väitteen **suora todistaminen**
   - Tehdään samoin kuin 2-kohdassa, mutta molempiin suuntiin!
5. Kaikenlaisten väitteiden **epäsuora todistaminen** (ristiriitatodistus)
   - Oletetaan, että väite ei päde. Johdetaan tästä ristiriita jonkun oletuksen, aksiooman, lauseen jne. kanssa. Tällöin väitteen on pädettävä!
6. Matemaattinen induktio

Induktio: yleisperiaate

Tapa todistaa matemaattisia väitteitä, joissa väitetään jonkin asian pätevän kaikilla luonnollisilla luvuilla.

1) Osoitetaan, että väite pätee joukon ensimmäisellä alkiolla, yleensä siis 0 tai 1
2) Oletetaan, että väite pätee yleisesti luvulla *n* (induktio-oletus)
3) Väitetään, että väite pätee myös seuraavalla luvulla *n+1* (induktioväite)
4) Käytetään induktio-oletusta induktioväitteen todistamiseen
5) Tällöin väite pätee luvulla 0, ja sitä seuraavalla, ja sitä seuraavalla jne... , eli on todistettu että väite pätee kaikilla luvuilla nollasta äärettömään!

Induktio 1: alkutapaus

Tehtävä: Osoita, että väite $0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$

Induktio 1: alkutapaus

Tehtävä: Osoita, että väite $0 + 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$

Alkutapaus: Näytetään, että väite pätee lukujoukon $\mathbb{N}_0$ ensimmäisellä alkiolla, siis luvulla 0.

Induktio 1: alkutapaus

Tehtävä: Osoita, että väite $0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$

Alkutapaus: Näytetään, että väite pätee lukujoukon $\mathbb{N}_0$ ensimmäisellä alkiolla, siis luvulla 0.

Osoitetaan, että väite pätee, kun n = 0. (alkutapaus)

$$0 = \frac{0 \cdot (0 + 1)}{2}$$

Induktio 1: alkutapaus

Tehtävä: Osoita, että väite $0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$

Alkutapaus: Näytetään, että väite pätee lukujoukon $\mathbb{N}_0$ ensimmäisellä alkiolla, siis luvulla 0.

Osoitetaan, että väite pätee, kun n = 0. (alkutapaus)

$$0 = \frac{0 \cdot (0+1)}{2} \Rightarrow 0 = \frac{0}{2} \Rightarrow 0 = 0$$

Induktio 1: alkutapaus

Tehtävä: Osoita, että väite $0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$

Alkutapaus: Näytetään, että väite pätee lukujoukon $\mathbb{N}_0$ ensimmäisellä alkiolla, siis luvulla 0.

Osoitetaan, että väite pätee, kun n = 0. (alkutapaus)

$$0 = \frac{0 \cdot (0+1)}{2} \Rightarrow 0 = \frac{0}{2} \Rightarrow 0 = 0$$

… joka on selvästikin tosi.

Induktio 2: induktio-oletus

Tehtävä: Osoita, että väite $0+1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$

Seuraava askel on tehdä induktio-oletus. Oletamme siis, että väite pätee kaikilla luvuilla n = k. Käytännössä tämä ei tarkoita muuta kuin tehtävässä annetun väitteen kirjoittamista n:t muutettuna k:iksi, ja sen merkitsemistä induktio-oletukseksi (IO).

Induktio 2: induktio-oletus

Tehtävä: Osoita, että väite $0+1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$

Seuraava askel on tehdä induktio-oletus. Oletamme siis, että väite pätee jollakin luvulla k. Käytännössä tämä ei tarkoita muuta kuin tehtävässä annetun väitteen kirjoittamista n:t muutettuna k:iksi, ja sen merkitsemistä induktio-oletukseksi (IO).

Induktio-oletus: Oletetaan, että väite pätee kaikilla n = k:

$$0+1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2} \qquad \text{(IO)}$$

Induktio 3: induktioväite

Tehtävä: Osoita, että väite $0 + 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$

Nyt päästään varsinaiseen työhön. Tehdään induktioväite, eli väitetään, että annettu väite pitää paikkaansa myös kaikilla luvuilla k + 1. Käytännössä siis nyt sijoitetaan tehtävän n:ien paikalle k+1:

Induktio 3: induktioväite

Tehtävä: Osoita, että väite $0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$

Nyt päästään varsinaiseen työhön. Tehdään induktioväite, eli väitetään, että annettu väite pitää paikkaansa myös kaikilla luvuilla k + 1. Käytännössä siis nyt sijoitetaan tehtävän n:ien paikalle k+1:

Induktioväite: väite pätee kaikilla luvuilla k + 1 induktio-oletuksen pätiessä:

$$(0 + 1 + 2 + \cdots + k) + (k + 1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

Induktio 4: induktioväitteen osoittaminen todeksi

Tehtävä: Osoita, että väite $0 + 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$

Ajatuksena on tästä lähtien pyöritellä induktioväitettä kunnes se saadaan sellaiseen muotoon jossa voimme esimerkiksi sijoittaa induktio-oletuksen yhtälöön.

Induktio 4: induktioväitteen osoittaminen todeksi

Tehtävä: Osoita, että väite $0 + 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$

Ajatuksena on tästä lähtien pyöritellä induktioväitettä kunnes se saadaan sellaiseen muotoon jossa voimme esimerkiksi sijoittaa induktio-oletuksen yhtälöön.

$$(0 + 1 + 2 + \cdots + k) + (k + 1)$$

Induktio 4: induktioväitteen osoittaminen todeksi

Tehtävä: Osoita, että väite $0 + 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$

Ajatuksena on tästä lähtien pyöritellä induktioväitettä kunnes se saadaan sellaiseen muotoon jossa voimme esimerkiksi sijoittaa induktio-oletuksen yhtälöön.

Esimerkissämme tämä on helppoa, sillä induktio-oletuksen voi sijoittaa heti induktioväitteen vasemmalle puolelle:

$$(0 + 1 + 2 + \cdots + k) + (k+1) \overset{\text{IO}}{=} \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

Induktio 4: induktioväitteen osoittaminen todeksi

Tehtävä: Osoita, että väite $0+1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$

Ajatuksena on tästä lähtien pyöritellä induktioväitettä kunnes se saadaan sellaiseen muotoon jossa voimme esimerkiksi sijoittaa induktio-oletuksen yhtälöön.

Ja pienellä pyörittelylllä (MAOL auttaa näissä):

$$(0+1+2+\cdots+k)+(k+1) \overset{\mathrm{IO}}{=} \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

Induktio 5: viimeistely

Tehtävä: Osoita, että väite $0 + 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$

Olemme nyt siis osoittaneet induktioväitteen todeksi, jos induktio-oletus on tosi:

$$(0 + 1 + 2 + \cdots + k) + (k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

Induktio 5: viimeistely

Tehtävä: Osoita, että väite $0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$

Olemme nyt siis osoittaneet induktioväitteen todeksi, jos induktio-oletus on tosi:

$$(0 + 1 + 2 + \cdots + k) + (k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

Väite on tosi, kun n = 0. Väite on myös tosi kaikilla n = k + 1, ehdolla että myös väite n = k on tosi. Siten induktioperiaatteen nojalla väite on tosi kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$

$\square$

Induktio: merkinnöistä

Tapana on käyttää väitteelle merkintänä jotakin aakkosta. Väite p, joka koskee lukuja n, merkittäisiin siis p(n).

Alkutapauksen n = 0 voi siten merkitä p(0)

Induktio-oletuksen n = k voi merkitä p(k)

Induktioväitteen n = k+1 voi merkitä p(k+1)

Lopullisen perustelun väitteen paikkansapitävyydelle voisi siis ilmaista myös:

“p(0) pätee. Myös p(k+1) pätee ehdolla että p(k) pätee. Siten induktioperiaatteen nojalla p(n) pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$ *“*

Määritelmiä

Kuvaus eli funktio

$$\text{Kuvausta eli funktiota } f \text{ joukolta } A \text{ joukolle } B \text{ merkitään } f : A \to B$$

Joukkoa A kutsutaan *lähtöjoukoksi* tai *määrittelyjoukoksi*

Joukkoa B kutsutaan *maalijoukoksi*

$$\text{Esimerkiksi: } f : A \to B, \text{ jossa } A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R} \text{ ja } f(x) = 2x + 1$$

f on siis kuvauksen “nimi”, ja kuvauksen varsinainen määrittely tehdään kertomalla lähtöjoukko, maalijoukko sekä kuvauksen määrittävä lauseke. **Huomaa merkintöjen f ja f(x) ero: f viittaa itse kuvaukseen, f(x) sen arvoihin!**

$$\text{Merkinnän } f(x) = 2x + 1 \text{ sijasta voidaan käyttää myös merkintää } x \mapsto 2x + 1$$

Itseisarvo

Määritelmä

(1.26)
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jos } x \geq 0 \\ -x, & \text{jos } x \leq 0 \end{cases},$$

Lause 1.28 (Itseisarvon ominaisuuksia).

(1) $|xy| = |x|\,|y|$ *kaikille* $x, y \in \mathbb{R}$.

(2) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ *kaikille* $x \in \mathbb{R}$ *ja kaikille* $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(3) $|x| \geq 0$ *kaikille* $x \in \mathbb{R}$, *ja lisäksi* $|x| = 0 \iff x = 0$.

(4) *Oletetaan, että* $a \geq 0$[9] *ja että* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Tällöin*

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a,$$

$$|x| < a \iff -a < x < a,$$

$$|x - x_0| \leq a \iff x_0 - a \leq x \leq x_0 + a,$$

$$|x - x_0| < a \iff x_0 - a < x < x_0 + a.$$

(5) $|x + y| \leq |x| + |y|$ *kaikille* $x, y \in \mathbb{R}$.

(6) $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$ *kaikille* $x, y \in \mathbb{R}$.[10]

Epäyhtälö

Lause 1.23. *Oletetaan, että* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *ja samoin* $x, y \in \mathbb{R}$. *Silloin*

(1)
$$\begin{cases} a \leq c \\ b \leq d \end{cases} \implies a + b \leq c + d\,.$$

(2) *Jos* $c > 0$, *niin*

$$a < b \implies ac < bc\,, \qquad \textit{itse asiassa} \qquad a < b \iff ac < bc\,.$$

(3) *Jos taas* $c < 0$, *niin*

$$a < b \implies ac > bc\,, \qquad \textit{itse asiassa} \qquad a < b \iff ac > bc\,.$$

(4) *Jos* $a > 0$, *niin*

$$0 < x < y \implies \frac{a}{x} > \frac{a}{y} \qquad \textit{ja} \qquad x < y \iff \frac{x}{a} < \frac{y}{a}\,. \qquad \blacksquare$$

Potenssit ja yhtälöt

Lause 1.38 *Oletetaan, että $x \in \mathbb{R}$ ja $y \in \mathbb{R}$ ovat molemmat epänegatiivisia (≥ 0) tai molemmat epäpositiivisia (≤ 0). Silloin pätee ekvivalenssi*

$$x = y \iff x^2 = y^2 .$$

Analyysiin: Raja-arvo

Lukujono

Lukujono on kuvaus $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ f(n) = a_n,\ missä\ siis\ n \in \mathbb{N}$

Esimerkiksi kaavalla $a_n = 2n$ määritelty lukujono:

(2,4,6,8,10,…) on parillisten lukujen jono.

Lukujonon **n:s jäsen** on arvo a_n, eli esimerkiksi yllä olevassa jonossa 4. jäsen on $a_4 = 8$.

Lukujonoa itseään merkitään yleensä seuraavasti:

$$(a_n) \quad tai \quad (a_n)_{n=1}^{\infty} \quad tai \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad tai \quad (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$$

Lukujonosta voidaan muodostaa osajono. Tämä on mikä tahansa jono, mikä "poimii kasvavassa järjestyksessä" alkuperäisen jonon jäseniä.

Jonon $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **osajono** on jono $(a_{n_i})_{i=1}^{\infty}$, kunhan jono $(n_1, n_2, \dots)$ on aidosti kasvava

Esimerkiksi lukujonon $(a_n) = (1,2,3,4,5,6, \dots)$ eräs osajono on parittomien lukujen jono $(a_{n_i}) = (1,3,5,7,9, \dots)$, joka on määritelty kaavalla: $a_{n_i} = a_i,\ missä\ i\ on\ pariton$

Rajatta kasvaminen ja väheneminen 1

Määritelmä 2.2. Lukujono (a_n) *kasvaa rajatta*, jos sen jäsenet lopulta ylittävät kaikki rajat: aina kun $M > 0$, on olemassa sellainen indeksi $n_M \in \mathbb{N}$, että

$$(*) \qquad n \geq n_M \implies a_n \geq M\,. \qquad \blacksquare$$

Määritelmä 2.3. Lukujono (a_n) *vähenee rajatta*, jos sen jäsenet lopulta alittavat kaikki rajat: aina kun $m < 0$, on olemassa sellainen indeksi $n_m \in \mathbb{N}$, että

$$(*') \qquad n \geq n_m \implies a_n \leq m\,. \qquad \blacksquare$$

Rajatta kasvaminen ja väheneminen 2

Lause 2.5. *Oletetaan, että* (a_n) *ja* (b_n) *ovat lukujonoja sekä* $c \in \mathbb{R}$ *luku.*

1. *Jos* (a_n) *ja* (b_n) *kasvavat rajatta, samoin tekee summajono* $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. *Jos jono* (a_n) *kasvaa rajatta ja jos lisäksi* $c > 0$, *myös jono* $(ca_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *kasvaa rajatta; jos lisäksi* $c < 0$, *jono* $(ca_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vähenee *rajatta.*

Vastaavat asiat pätevät rajatta väheneville jonoille.

Suppenevuus 1

Määritelmä 2.8. Oletetaan, että $a \in \mathbb{R}$ ja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on jono $\mathbb{R}$:ssä. Sanomme, että x_n *lähestyy rajatta lukua* a, jos aina kun on annettu $\varepsilon > 0$, on olemassa sellainen indeksi $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että

$$n \geq n_\varepsilon \implies |x_n - a| < \varepsilon\,.$$

Samassa tilanteessa sanomme myös, että *jono* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *suppenee kohti lukua* a. ■

Suppenevuus 2

Määritelmä 2.10. Lukujono (x_n) *suppenee*, jos on olemassa reaalinen raja-arvo $\lim_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$. Muuten jono (x_n) *hajaantuu*. ∎

Yksi erityinen tapa hajaantua on siis kasvaa tai vähetä rajatta! Jos

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = \infty \qquad \text{tai} \qquad \exists \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty,$$

jono (x_n) $\boxed{\text{hajaantuu}}$ *kohti plus* tai *miinus ääretöntä*. Kuitenkaan hyvin monilla (itse asiassa tietyssä mielessä *useimmilla*) jonoilla *ei ole raja-arvoa* edes joukossa $\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$: ne *hajaantuvat* mutteivät edes tuolla erityisellä tavalla (eivät edes vähene eivätkä kasva rajatta).

Laajennetut reaaliluvut

Määritelmä 2.13 (Laajennettu lukusuora). Joukkoa

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

sanotaan *laajennetuksi lukusuoraksi*, ja teemme siinä seuraavat sopimukset — alkuperäisten summa-, erotus-, tulo-, osamäärä- ja potenssilausekkeiden lisäksi määrittelemme uudet "sallitut muodot" sekä asetamme lisää järjestyksiä:

$$\infty > x \quad \text{kaikille } x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{\infty\}, \qquad -\infty < x \quad \text{kaikille } x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\},$$

$$x + \infty = \infty + x = \infty + \infty = \infty \quad \text{kaikille } x \in \mathbb{R},$$

$$x + (-\infty) = x - \infty = (-\infty) + x = (-\infty) + (-\infty) = -\infty - \infty = -\infty \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty \quad \text{kaikille } a > 0, \qquad a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty \quad \text{kun } a > 0,$$

$$a \cdot \infty = \infty \cdot a = -\infty \quad \text{kaikille } a < 0, \qquad a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = \infty \quad \text{kun } a < 0,$$

$$\frac{\infty}{a} = \frac{1}{a} \cdot \infty \quad \text{kaikille } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad \frac{-\infty}{a} = \frac{1}{a} \cdot (-\infty) \quad \text{kaikille } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$\infty^n = \sqrt[n]{\infty} = \infty \quad \text{kaikille } n \in \mathbb{N},$$

$$(-\infty)^n = (-1)^n \infty^n = (-1)^n \infty, \qquad \sqrt[n]{-\infty} = -\infty \quad (n \text{ pariton}),$$

$$\frac{a}{\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0 \quad \text{kaikille } a \in \mathbb{R},$$

$$\infty \cdot \infty = (-\infty)(-\infty) = \infty, \qquad \infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty,$$

$$b^\infty = \begin{cases} 0, & \text{kun } -1 < b < 1, \\ \infty, & \text{kun } b > 1. \end{cases}$$

“Kielletyt muodot” (indeterminate forms)

Indeterminate form	Conditions
$0/0$	$\lim_{x \to c} f(x) = 0, \ \lim_{x \to c} g(x) = 0$
∞/∞	$\lim_{x \to c} f(x) = \infty, \ \lim_{x \to c} g(x) = \infty$
$0 \times \infty$	$\lim_{x \to c} f(x) = 0, \ \lim_{x \to c} g(x) = \infty$
$\infty - \infty$	$\lim_{x \to c} f(x) = \infty, \ \lim_{x \to c} g(x) = \infty$
0^0	$\lim_{x \to c} f(x) = 0^+, \lim_{x \to c} g(x) = 0$
1^∞	$\lim_{x \to c} f(x) = 1, \ \lim_{x \to c} g(x) = \infty$
∞^0	$\lim_{x \to c} f(x) = \infty, \ \lim_{x \to c} g(x) = 0$

Lukujonojen raja-arvojen laskusääntöjä

Lause 2.14 (Lukujonojen raja-arvojen laskusääntö)**.**
Jos $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ *ja* $\exists \lim_{n\to\infty} y_n = \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, *niin* $\boxed{\text{“sallituin muodoin”}}$

(i) $\quad \exists \lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \alpha \pm \beta\,,$

(ii) $\quad \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \alpha\beta\,,$

(iii) $\quad \exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}\,,$ *jos kaikille* $n \in \mathbb{N}$ *on* $y_n \neq 0$.[20]

Raja-arvon merkintä

Huomautus 2.15 (Lisää merkintöjä)**.**
Merkinnän $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ sijasta on ***käytännön laskuissa*** usein järkevämpää käyttää merkintää "$x_n \to \alpha$, kun $n \to \infty$", tai merkintää

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha\,.$$