Matemaattisen analyysin tukikurssi

2. kurssikerta (23.9.2019)

Kuristusperiaate lukujonoille

Lause 2.20 (Kuristusperiaate jonoille). *Oletetaan, että* (x_n), (y_n) *ja* (z_n) *ovat reaalilukujonoja ja* $a \in \mathbb{R}$ *sekä että* $x_n \leq y_n \leq z_n$ *kaikille* $n \in \mathbb{N}$.

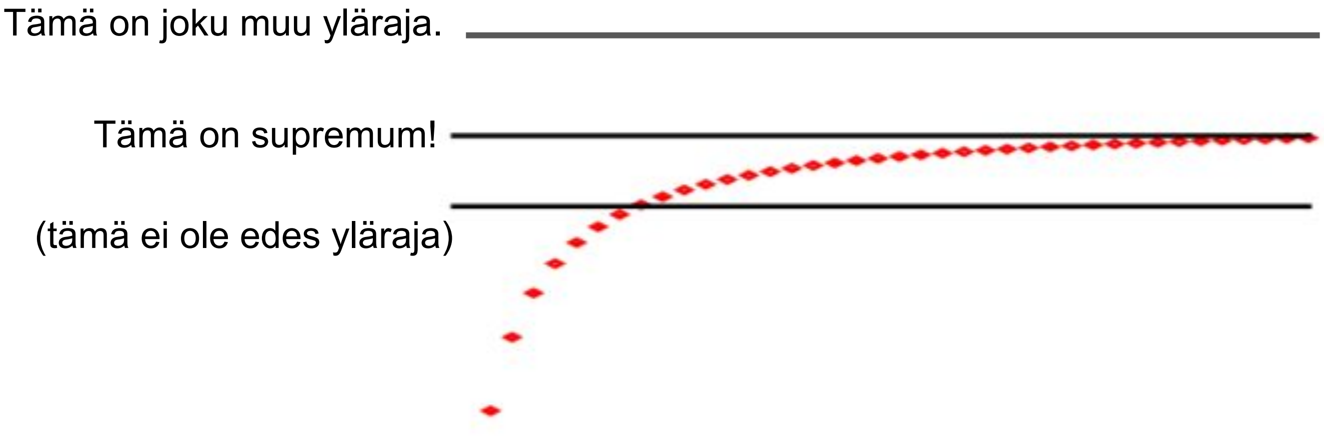
1. *Jos* $x_n \to a \leftarrow z_n$, *kun* $n \to \infty$, *niin samoin* $\exists \lim_{n\to\infty} y_n = a$.
2. *Jos* $x_n \to \infty$, *kun* $n \to \infty$, *niin samoin* $y_n \to \infty$.
3. *Jos* $z_n \to -\infty$, *kun* $n \to \infty$, *niin samoin* $y_n \to -\infty$. ■

Kasvavuus ja vähenevyys (lukujonoille)

Määritelmä 2.22. Jono (x_n) on *kasvava*, jos $x_n \leq x_{n+1}$ kaikille $n \in \mathbb{N}$. Jono (x_n) on *vähenevä*, jos $x_n \geq x_{n+1}$ kaikille $n \in \mathbb{N}$. Jono on *monotoninen*, jos se on kasvava tai vähenevä.

Supremum

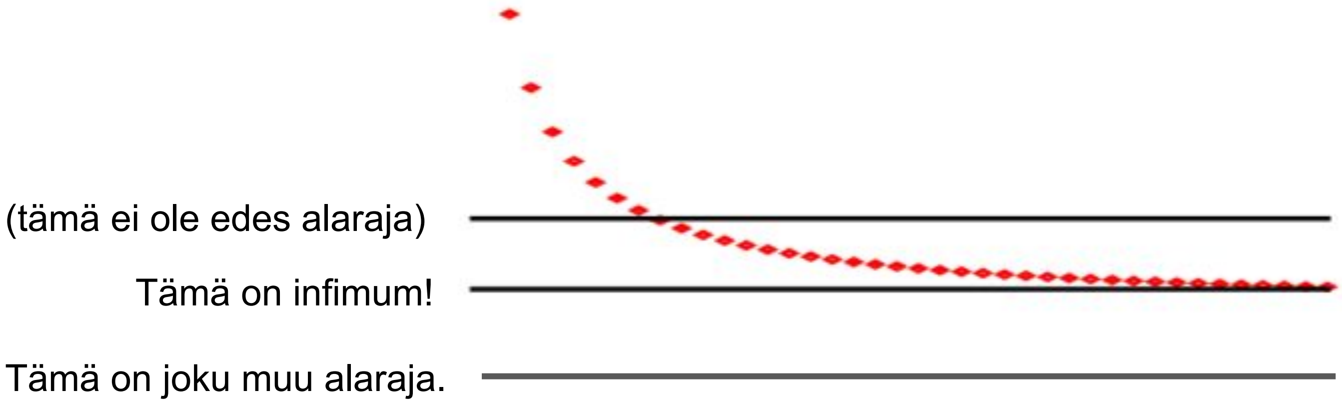
Supremum on lukujonon kaikista mielivaltaisista ylärajoista **pienin**



Kasvavalla jonolla on aina raja-arvo, joka on joko $+\infty$ tai jonon supremum!

Infimum

Infimum on lukujonon kaikista mielivaltaisista alarajoista **suurin**



Vähenevällä jonolla on aina raja-arvo, joka on joko -∞ tai jonon infimum!

Sama lauseena 2.24

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} \infty\,, & \textit{kun } (x_n) \textit{ on kasvava eikä ole ylhäältä rajoitettu,} \\ \sup\{\,x_n \mid n\in\mathbb{N}\,\}, & \textit{kun } (x_n) \textit{ on kasvava ja ylhäältä rajoitettu,} \\ -\infty\,, & \textit{kun } (x_n) \textit{ on vähenevä eikä ole alhaalta rajoitettu,} \\ \inf\{\,x_n \mid n\in\mathbb{N}\,\}, & \textit{kun } (x_n) \textit{ on vähenevä ja alhaalta rajoitettu.} \qquad \blacksquare \end{cases}$$

Käsitteitä

Määritelmä 2.27 (Ympäristö)**.** Oletetaan, että $x_0 \in \mathbb{R}$. Pisteen x_0 *ympäristöllä* tarkoitamme mitä tahansa avointa väliä $U \ni x_0$. *"Toispuoleiseksi ympäristöksi"* (tarkemmin: *"vasemman-"* tai *"oikeanpuoleiseksi ympäristöksi"*) sanomme puoliavointa väliä, jonka päätepisteenä (tarkemmin: loppu- tai alkupisteenä) on väliin kuuluva x_0. ■

Määritelmä 2.28 (Punkteerattu ympäristö)**.** Oletetaan, että $x_0 \in \mathbb{R}$. Pisteen x_0 *"punkteerattu ympäristö"* (vastaavasti *"toispuoleinen punkteerattu ympäristö"*) tarkoittaa joukkoa, joka saadaan x_0:n ympäristöstä (vastaavasti toispuoleisesta ympäristöstä) poistamalla itse piste x_0. ■

Raja-arvon määritelmä reaalifunktioille

Määritelmä 2.29. Oletetaan, että $f\colon A \to \mathbb{R}$ on funktio ja $x_0 \in \mathbb{R}$ on sellainen, että f on määritelty (ainakin) jossakin x_0:n punkteeratussa ympäristössä — siis mahdollisesti ei itse x_0:ssa. (Ts. voi olla $x_0 \notin A$.) Funktiolla f on *raja-arvo* $a \in \mathbb{R}$ *pisteessä* x_0, jos jokaista a:n ympäristöä $V \ni a$ kohti on olemassa sellainen x_0:n ympäristö U, että

$$(*) \qquad x \in U \setminus \{x_0\} \implies f(x) \in V\,.$$

Sitä, että f:llä on pisteessä x_0 raja-arvo a, merkitään esim. "$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = a$" ja "$f(x) \to a$, kun $x \to x_0$", lue: "$f(x)$ lähestyy a:ta, kun x lähestyy x_0:aa". $\blacksquare$

Epsilon-delta-määritelmä

Toinen tapa määritellä reaalinen raja-arvo, n.s. ”epsilon-delta-määritelmä”:

Olkoot f : A → ℝ funktio, missä A on ℝ:n osajoukko. Tutkitaan pistettä x_0, jonka ei välttämättä tarvitse kuulua joukkoon A, mutta sen ”ympärillä” (ympäristössä) tulee olla joukon A pisteitä.

Olkoot ε mielivaltainen luku, kunhan se on suurempaa kuin nolla. Sanotaan, että **funktiolla f on raja-arvo $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ pisteessä x_0**, jos voidaan löytää luku δ_ε(eli riippuu epsilonista), joka on suurempaa kuin nolla, ja jolla pätee seuraavaa:

$$|x - x_0| < \delta_\varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - a| < \varepsilon$$

Huomaa, että raja-arvon määritelmä mukaan raja-arvo ei riipu siitä, miten funktio on määritelty kyseisessä pisteessä.

Raja-arvojen mielekkyydestä

Huomautus 2.37. Yksittäisen raja-arvokysymyksen tilanteesta voidaan esittää seuraava "arvoasteikko":

1. raja-arvo ei ole mielekäs,
2. raja-arvo on mielekäs muttei olemassa,
3. raja-arvo on olemassa (ja automaattisesti mielekäs),
4. tiedämme raja-arvon arvon (ja se on sekä olemassa että mielekäs).

Kahdessa ensimmäisessä "asteessa" on kysymys siitä, eikö kyseisen käsitteen *määritelmän oletus* ole voimassa vai onko; katso pykälä 1.5. ■

Raja-arvolaskentaa reaalifunktioilla 1

Esimerkki 2.33. Seuraavien tulosten (lyhyet) perustelut sivuutetaan. Oletetaan, että I on avoin väli.

(i) Jos f on *vakiofunktio* $x \mapsto c$ joukossa $I \setminus \{x_0\}$, ts. $f(x) = c$ kaikille x, niin

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = c\,.$$

(ii) Jos $f(x) = x$ kaikille $x \in I \setminus \{x_0\}$, niin

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = x_0\,. \qquad \blacksquare$$

Raja-arvolaskentaa reaalifunktioilla 2

Lause 2.38 (Reaalifunktioiden raja-arvojen laskusääntö)**.**
Oletetaan, että f ja g ovat pisteen $x_0 \in \mathbb{R}$ "punkteeratussa ympäristössä" (siis mahdollisesti ei itse pisteessä x_0) määriteltyjä reaaliarvoisia funktioita.
Oletetaan vielä, että $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ *ja* $\exists \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \beta \in \overline{\mathbb{R}}$.

Tällöin $\boxed{\text{“sallituin muodoin”}}$

(i) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = \alpha + \beta$,

(ii) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) - g(x)\big) = \alpha - \beta$,

(iii) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x)g(x)\big) = \alpha\beta$ *ja*

(iv) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$. [26]

Raja-arvolaskentaa reaalifunktioilla 3

Funktio $P\colon A \to \mathbb{R}$ (missä $A \subset \mathbb{R}$; yleensä $A = \mathbb{R}$) on *polynomifunktio*, jos on olemassa *kertoimet* $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ se. kaikille $x \in A$ on

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i .$$

Jos tässä lisäksi $a_n \neq 0$, polynomin *aste* $\deg(P) = n$.

Lause 2.40. *Oletetaan, että $P\colon A \to \mathbb{R}$, missä $x_0 \in A \subset \mathbb{R}$, on polynomifunktio ja että jokin x_0:n ympäristö sisältyy A:han. Tällöin on $\exists \lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0) \quad (\in \mathbb{R})$.*

Raja-arvolaskentaa reaalifunktioilla 4

Funktio $f\colon A \to \mathbb{R}$ (missä $A \subset \mathbb{R}$) on *rationaalifunktio*, jos on olemassa polynomifunktiot P ja Q se. $Q(x) \neq 0$ kaikille $x \in A$ ja

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad \text{kaikille } x \in A.$$

Seuraava lause osoittaa, että rationaalifunktioille raja-arvo on arvo ts. ne ovat ns. *jatkuvia* laajimmassa mahdollisessa määrittelyjoukossaan, jossa $\mathbb{R}$:stä on poistettu nimittäjäpolynomin Q kaikki nollakohdat (joita on enintään $\deg(Q)$ kappaletta).

Lause 2.41. *Oletetaan, että $f\colon A \to \mathbb{R}$, missä $x_0 \in A \subset \mathbb{R}$, on rationaalifunktio ja että jokin x_0:n ympäristö sisältyy A:han. Tällöin on* $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ $(\in \mathbb{R})$.

Raja-arvolaskentaa käytännössä

Aluksi käytä edellä olleita lauseita (“sijoita suoraan”). Jos tulee kielletty muoto niin:

1) Tarkista, että lauseke on yksinkertaisimmassa muodossaan

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$$

2) Yritä supistaa suurimmalla potenssilla

$$\frac{x^4+x^3}{3x^4} = \frac{1+\frac{1}{x}}{3}$$

3) Hankkiudu eroon nollista nimittäjässä

$$\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$$