Matemaattisen analyysin tukikurssi

3. kurssikerta (30.9.2019)

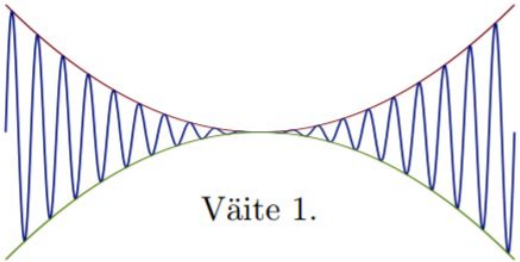
Raja-arvoista

Kuristusperiaate reaalifunktioille

Lause 2.48 (Kuristusperiaate reaalifunktioille)**.** *Oletetaan, että f, g ja h ovat reaalifunktioita, jotka on määritelty jossakin pisteen $\chi_0 \in \mathbb{R}$ (tai x_0, jos haluat) ympäristössä U, paitsi mahdollisesti itse χ_0:ssa, että $a \in \mathbb{R}$ sekä että*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \qquad \textit{kaikille } x \in U \setminus \{\chi_0\}.$$

1. *Jos $f(x) \to a \leftarrow h(x)$, kun $x \to \chi_0$, niin samoin $\exists \lim_{x \to \chi_0} g(x) = a$.*
2. *Jos $f(x) \to \infty$, kun $x \to \chi_0$, niin samoin $g(x) \to \infty$.*
3. *Jos $h(x) \to -\infty$, kun $x \to \chi_0$, niin samoin $g(x) \to -\infty$.*



Väite 1.

Toispuoleinen raja-arvo 1

Määritelmä 2.55 (Toispuoleinen raja-arvo, reaalinen)**.**
Oletetaan, että $f\colon A \to \mathbb{R}$ on funktio ja $x_0 \in \mathbb{R}$ on sellainen, että f on määritelty jossakin x_0:n *oikeanpuoleisessa* punkteeratussa ympäristössä — siis mahdollisesti ei itse x_0:ssa. (Ts. voi olla $x_0 \notin A$.) Funktiolla f on *oikeanpuoleinen raja-arvo* $a \in \mathbb{R}$ pisteessä x_0, jos jokaista a:n ympäristöä $V \ni a$ kohti on olemassa sellainen x_0:n *oikeanpuoleinen* ympäristö C, tai, jos halutaan, C_+, että

$$(*) \qquad x \in C_+ \setminus \{x_0\} \implies f(x) \in V\,.$$

Sitä, että f:llä on pisteessä x_0 oikeanpuoleinen raja-arvo a, merkitään esim. "$\exists \lim_{x\to x_0+} f(x) = a$" ja "$f(x) \to a$, kun $x \to x_0+$", lue: "$f(x)$ lähestyy a:ta, kun x lähestyy x_0:aa oikealta".

Vastaava määrittely ja merkinnät on *vasemmanpuoleiselle* raja-arvolle. Yhteisnimitys em. raja-arvokäsitteille on *toispuoleinen raja-arvo*. ■

Toispuoleinen raja-arvo 2

Lause 2.57. *Jos on* $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$, *niin on olemassa myös sekä* $\lim_{x \to x_0-} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ *että* $\lim_{x \to x_0+} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ *ja pätee, että*

$$(*) \qquad \lim_{x \to x_0-} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0+} f(x)\,.$$

Kääntäen: Jos sekä $\lim_{x \to x_0-} f(x)$ *että* $\lim_{x \to x_0+} f(x)$ *ovat olemassa ja jos lisäksi on* $\lim_{x \to x_0-} f(x) = \lim_{x \to x_0+} f(x)$, *niin on olemassa* $\lim_{x \to x_0} f(x)$ *ja* $(*)$ *pätee.* $\blacksquare$

Yhdistettyjen funktioiden raja-arvot

Lause 2.61 (Yhdistettyjen funktioiden raja-arvot). *Oletetaan, että* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ *ovat kuvauksia, missä* $A, B \subset \mathbb{R}$*, että* $\chi_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ *ja että*

$$\exists \lim_{x \to \chi_0} f(x) = \alpha \in \overline{\mathbb{R}} \qquad \textit{ja} \qquad \exists \lim_{y \to \alpha} g(y) = \beta \in \overline{\mathbb{R}}\,.$$

Jos (tapauksessa $\alpha \in \mathbb{R}$*) on* $f(x) \neq \alpha$*, kun* x *on "lähellä* χ_0*:aa" mutta* $x \neq \chi_0$*, niin yhdistetylle funktiolle* $g \circ f\colon A \to \mathbb{R}$ *pätee:*

$$\exists \lim_{x \to \chi_0} g\big(f(x)\big) = \beta\,; \tag{2.62}$$

sanallisesti: "kun $x \to \chi_0$*, niin* $y = f(x) \to \alpha$*, jolloin* $g\big(f(x)\big) = g(y) \to \beta$*".*

Juurien raja-arvoista

Lause 2.66. *Tarkastellaan juuren indeksinä lukuja* $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

(i) *Jos* $n \in \mathbb{N}$ *on parillinen, niin*

$$\exists \lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0} \qquad \textit{kaikille } x_0 \in [0, \infty[\textit{ eli } \underline{\textit{koko määrittelyjoukossa}},$$

paitsi että pisteessä $x_0 = 0$ *tarkoitetaan vain* oikeanpuoleista *raja-arvoa.*

(ii) *Jos* $n \in \mathbb{N}$ *on pariton, niin*

$$\exists \lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0} \qquad \textit{kaikille } x_0 \in \mathbb{R} \textit{ eli } \underline{\textit{koko määrittelyjoukossa}}. \qquad \blacksquare$$

Jatkuvuus

Jatkuvuus **pisteessä**

Määritelmä 3.1. Oletetaan, että $f\colon A \to \mathbb{R}$ on funktio, $A \subset \mathbb{R}$ ja x_0 sellainen, että jokin x_0:n *ympäristö* sisältyy f:n lähtöön A. (Tässä siis välttämättä $x_0 \in A$.) Sanomme, että funktio f on *jatkuva pisteessä* $x_0 \in A$, jos sillä on raja-arvo x_0:ssa ja jos tämä raja-arvo on funktion arvo $f(x_0)$, ts. jos pätee ehto

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\,. \qquad \blacksquare$$

Määritelmä 3.2. Oletetaan, että $f\colon A \to \mathbb{R}$ on funktio ja $x_0 \in A \subset \mathbb{R}$ sellainen, että jokin x_0:n *oikeanpuoleinen ympäristö* sisältyy f:n lähtöön A. Sanomme, että funktio f on *oikealta jatkuva pisteessä* $x_0 \in A$, jos pätee ehto

$$\exists \lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)\,.$$

Vastaavasti määritellään käsite, että f on *vasemmalta jatkuva pisteessä* x_0. $\blacksquare$

Jatkuvuus **pisteessä**

Funktio on siis jatkuva pisteessä, jos:

1. Funktiolla on olemassa raja-arvo kyseisessä pisteessä
2. Funktiolla on olemassa arvo kyseisessä pisteessä
3. Raja-arvo ja arvo ovat samat kyseisessä pisteessä

Jatkuvuus **joukossa**

Määritelmä 3.3. Oletetaan, että $f\colon A \to \mathbb{R}$ on funktio, missä $A \subset \mathbb{R}$, ja että $B \subset A$ on sellainen, että jokaisella $x \in B$ on joko ympäristö, joka sisältyy B:hen, tai ("reunapisteillä") *ainoastaan* toispuoleinen ympäristö, joka sisältyy B:hen.

Sanomme, että f *on jatkuva joukossa* B, jos se on jatkuva jokaisessa $x_0 \in B$, paitsi jos x_0 on reunapiste, jolloin vaaditaan oikealta tai vasemmalta jatkuvuus.

Jos f on jatkuva koko lähtöjoukossaan A, sanomme, että f *on jatkuva.* ■

Jatkuvuuslauseita 1

Lause 3.7. *Jos $f\colon A \to \mathbb{R}$ on sekä vasemmalta että oikealta jatkuva pisteessä $x_0 \in A$, niin f on jatkuva pisteessä x_0* (ja kääntäen).

Todistus. Seuraa lauseesta 2.57 (jatkuvuuskäsitteiden määritelmiä käyttäen). ∎

Lause 3.8. *Oletetaan, että $f\colon A \to \mathbb{R}$ ja $g\colon A \to \mathbb{R}$ ovat kuvauksia ja $x_0 \in A$. Jos f ja g ovat jatkuvia x_0:ssa (vast. A:ssa), niin myös $f+g$, $f-g$, fg ja $\frac{f}{g}$ ovat jatkuvia x_0:ssa (vast. A:ssa). Osamäärän $\frac{f}{g}$ tapauksessa tehdään* lisäoletus, *että $g(x_0) \neq 0$ (vast. $g(x) \neq 0$ kaikille $x \in A$).*

Seuraus 3.9. *Rationaalifunktio $f = P/Q$, (missä P, Q ovat polynomifunktioita) on jatkuva koko määrittelyjoukossaan $A = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$.*

Jatkuvuuslauseita 2

Lause 3.11. *Jos* $f\colon A \to B$ *on jatkuva pisteessä* $x_0 \in A$ *ja* $g\colon B \to \mathbb{R}$ *jatkuva pisteessä* $f(x_0) \in B$, *niin yhdistetty kuvaus* $g \circ f\colon A \to \mathbb{R}$ *on jatkuva pisteessä* x_0.

Lause 3.13. *Oletetaan, että* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *ja* $g\colon B \to \mathbb{R}$ *ovat funktioita ja että* $x_0 \in A \cap B$. *Tällöin:*

- *Jos* f *ja* g *yhtyvät jossakin* x_0*:n ympäristössä ja jos* f *on jatkuva* x_0*:ssa, on myös* g *jatkuva* x_0*:ssa.*
- *Jos* f *ja* g *yhtyvät jossakin* x_0*:n* vasemman*puoleisessa ympäristössä ja jos* f *on* vasemmalta *jatkuva* x_0*:ssa, on myös* g vasemmalta *jatkuva* x_0*:ssa.*
- *Jos* f *ja* g *yhtyvät jossakin* x_0*:n* oikean*puoleisessa ympäristössä ja jos* f *on* oikealta *jatkuva* x_0*:ssa, on myös* g oikealta *jatkuva* x_0*:ssa.* ■

Derivaatta

Derivaatan ja derivoituvuuden määritelmä

Määritelmä 3.18. Oletetaan, että f on pisteen x_0 ympäristössä $]x_0 - r, x_0 + r[$, missä $r > 0$, määritelty reaaliarvoinen funktio, ja tarkastellaan lukuja $x = x_0 + h$, kun $0 < |h| < r$. Osamäärää (joka näin ehdoin on olemassa)

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

sanotaan f:n *erotusosamääräksi* pisteessä x_0, kun f:n argumentin lisäys on h. Jos on olemassa erotusosamäärän *reaalinen* raja-arvo

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \in \mathbb{R},$$

niin tätä raja-arvoa merkitään

$$f'(x_0) = (Df)(x_0) = \left[D_x f(x)\right]_{x = x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ja sanotaan *funktion f derivaataksi pisteessä* x_0. Jos $f'(x_0)$ on olemassa, sanotaan, että f on *derivoituva* x_0:ssa.

Toispuoleinen derivaatta

Jos f on määritelty (ehkä vain) x_0:n oikeanpuoleisessa ympäristössä ja erotusosamäärällä on oikeanpuoleinen raja-arvo

$$f'(x_0+) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R},$$

f on *oikealta derivoituva* x_0:ssa ja $f'(x_0+)$ on f:n *oikeanpuoleinen derivaatta* x_0*:ssa*. Vastaavasti raja-arvo

$$f'(x_0-) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R}$$

on f:n *vasemmanpuoleinen derivaatta* x_0*:ssa*. ∎

Derivaattafunktio

Määritelmä 3.23 (Derivaattafunktio).

Jos $f\colon A \to \mathbb{R}$ on *jokaisessa* A:n pisteessä x_0 derivoituva (tai toispuoleisesti derivoituva, jos x_0:lla on *ainoastaan* toispuoleinen A:han sisältyvä ympäristö), sanomme, että f *on derivoituva joukossa* A. Tällöin funktio

$$Df = f'\colon A \to \mathbb{R}, \qquad \text{jossa} \quad x \mapsto f'(x) = (Df)(x),$$

on f:n *derivaattafunktio*. (Lue: "x kuvautuu $f'(x)$:ksi".)

Yleisessä tapauksessa derivaattafunktio on määritelty siinä *A:n osajoukossa*, joka koostuu niistä A:n pisteistä, joissa f:llä on derivaatta (tai toispuoleinen derivaatta, jos pisteellä on *ainoastaan* toispuoleinen A:han sisältyvä ympäristö).

∎

Merkinnöistä

Huomautus 3.24 (Derivaattamerkinnöistä)**.** Derivaatta*funktion* merkintämme siis ovat muotoa f' ja Df. Jos funktiolle tulee argumentti, esim. x, merkitsemme $f'(x)$ tai $Df(x)$, selvemmin $(Df)(x)$, mutta *emme missään tapauksessa* $D(f(x))$!

Merkintöjen ja ajatuksen selvyyteen pyrittäessä on hyvä huomata myös seuraava (pian esitettäviä, lukijalle oletettavasti ennestään tutunoloisia sääntöjä lainaten):

- D operoi *funktioon*, esimerkiksi $Df = f'$ tai $D\sin = \cos$ tai $D(f \circ g)$.
- D_x operoi *lausekkeeseen*, esimerkiksi $D_x\, f(x) = f'(x)$ tai $D_x \sin x = \cos x$ tai $D_x\, x^2 = 2x$. [34]

Lause

Lause 3.25. *Oletetaan, että* f *on* x_0*:n ympäristössä määritelty reaalifunktio. Jos on olemassa* $f'(x_0)$, *niin on olemassa sekä* $f'(x_0+)$ *että* $f'(x_0-)$ *ja*

$$(*) \qquad f'(x_0+) = f'(x_0) = f'(x_0-)\,.$$

Kääntäen: Jos on olemassa $f'(x_0+)$ *ja* $f'(x_0-)$ *ja ne ovat samat, niin on olemassa* $f'(x_0)$ *ja* $(*)$ *pätee.* ∎