Matemaattisen analyysin tukikurssi

4. Kurssikerta (7.10.2019)

Differentioituvuus

Määritelmä 3.29 (Differentioituvuus, differentiaalikehitelmä)**.**
Oletetaan, että f on pisteen x_0 ympäristössä määritelty reaalifunktio. Sanomme, että f on *differentioituva* pisteessä x_0, jos sen muutoksella $f(x_0+h)-f(x_0)$ on ns. *differentiaalikehitelmä*: on olemassa sellainen $a \in \mathbb{R}$, että pienille h

$$f(x_0+h)-f(x_0) = ah + h\varepsilon(h)\,, \tag{3.30}$$

missä funktiolla ε on ominaisuus $\exists \lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$. ■

Derivoituva ⇔ differentioituva

Lause 3.32 (Yksiulotteinen tapaus: derivoituva joss differentioituva)**.**
(Perusoletus: Oletetaan, että f on x_0:n ympäristössä määritelty reaalifunktio.)
Tällöin f on derivoituva x_0:ssa, jos ja vain jos f on differentioituva x_0:ssa.
Lisäksi differentiaalikehitelmä on (olemassa ollessaan) välttämättä muotoa

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + h\varepsilon(h)\,.$$

Derivoituva ⇒ jatkuva

Lause 3.33 (Yksiulotteinen tapaus: derivoituva on jatkuva)**.**
Oletetaan, että funktio f on derivoituva pisteessä x_0 (tai vastaavasti joukossa A).
Tällöin f on jatkuva x_0:ssa (tai vastaavasti A:ssa).
Vastaava pätee toispuoleisille käsitteille.

Mutta jatkuva funktio **ei ole** välttämättä derivoituva!!

Derivointisääntöjä 1

Lause 3.34. *Jos f on differentioituva x_0:ssa ja g on differentioituva $f(x_0)$:ssa, niin yhdistetty funktio $g \circ f$ on differentioituva x_0:ssa ja*

(K) $$(g \circ f)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big) f'(x_0) \,.$$ [35]

Lause 3.35. *Oletetaan, että f ja g ovat derivoituvia x_0:ssa. Tällöin $f + g$ ja fg ovat derivoituvia x_0:ssa ja*

(i) $$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \,,$$

(ii) $$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0) \,.$$ [37]

Jos lisäksi $g(x_0) \neq 0$, niin osamäärä $\frac{f}{g}$ on derivoituva x_0:ssa ja

(iii) $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{\big(g(x_0)\big)^2} \,.$$ [38]

Derivointisääntöjä 2

Lause 3.36. *Alla tarkoitetaan derivaattoja pisteessä x tapauksessa, että jokin x:n ympäristö sisältyy määrittelyjoukkoon, ja toispuoleisia derivaattoja pisteessä x, jos* ainoastaan *jokin x:n toispuoleinen ympäristö sisältyy määrittelyjoukkoon.*

(i) *Vakiofunktiolla on derivaatta* 0.

(ii) *Identtisellä kuvauksella* id, *jolle* $\mathrm{id}(x) = x$, *on derivaatta* 1.

(iii) $\exists\, D_x x^n = nx^{n-1}$, *kun* $n \in \mathbb{Z}$ *ja* $x \neq 0$ $\quad$ (*jos* $n \in \mathbb{N}$, *käy myös* $x = 0$).

(iv) $\exists\, D_x \sqrt{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, *kun* $x > 0$.

(v) $\exists\, D(af) = aDf$, *kun* f *derivoituva ja* $a \in \mathbb{R}$ *on vakio.*

(vi) *Polynomifunktiolla* P, *jolle* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, *on derivaatta*

$$P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 .$$

Derivointisääntöjä 3

(vii) *Rationaalifunktiolla* $f = \frac{P}{Q}$ *(missä* P *ja* Q *polynomifunktioita;* $Q(x_0) \neq 0$*), on derivaatta*

$$f'(x_0) = \frac{P'(x_0)Q(x_0) - Q'(x_0)P(x_0)}{\big(Q(x_0)\big)^2}.$$

(viii) *Eksponenttifunktiolla ja luonnollisella logaritmifunktiolla on derivaatat*

$$D_x e^x = e^x \qquad (x \in \mathbb{R}) \qquad \textit{ja} \qquad D_x \ln x = \tfrac{1}{x} \qquad (x > 0).$$

(ix) *Trigonometrisiä funktioita* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$*:* $\exists D \sin = \cos$ *ja* $\exists D \cos = -\sin$.

(x) *Lisää trigonometrisia funktioita:*

$$\exists D_x \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \qquad \big(x \notin \tfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\big),$$

$$\exists D_x \cot x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x \qquad \big(x \notin \pi\mathbb{Z}\big).$$

Lause 3.40. *Jos* $r \in \mathbb{Q}$*, niin* $\exists D_x x^r = r x^{r-1}$*, kun* $x > 0$. [39]

Korkeammat derivaatat

Oletetaan, että $f\colon A \to \mathbb{R}$ on reaalifunktio (missä $A \subset \mathbb{R}$). Merkitään

$$A_1 = \{\, x \in A \mid \exists\, f'(x) \,\},$$

jolloin $f'\colon A_1 \to \mathbb{R}$ on f:n *derivaatta(funktio)* eli f:n *ensimmäinen derivaatta* (voidaan merkitä myös $f^{(1)} = f'$). Jos $x_0 \in A_1$ ja jos funktio f' on derivoituva x_0:ssa, niin

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h}$$

on f:n *toinen derivaatta* x_0*:ssa* ja joukossa

$$A_2 = \{\, x \in A_1 \mid \exists\, f''(x) \,\} \qquad (\subset A_1)$$

Bolzanon lause ja ääriarvoista

Lause 3.47 (Bolzano). *Oletetaan, että* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *on jatkuva. Tällöin pätee: Jos* $f(a) < 0$ *ja* $f(b) > 0$, *niin on olemassa sellainen* $x_0 \in\,]a,b[$, *että* $f(x_0) = 0$.

Lause 3.50. *Oletetaan, että* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *on jatkuva. Tällöin* f*:llä on välillä* $[a,b]$ *pienin arvo,* m, *ja suurin arvo,* M, *ja lisäksi on* $f[a,b] = [m,M]$. ∎

Väliarvolause

Lause 3.54 (Väliarvolause, VAL).

Oletetaan, että $a < b$ *sekä* f *on* (1) *jatkuva* $[a, b]$*:ssä ja* (2) *derivoituva* $]a, b[$*:ssä. Tällöin on olemassa piste* $\xi \in\,]a, b[$ *se.*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)\,. \tag{$*$}$$

Derivoituvuustesti

Lause 3.58 (Derivoituvuustesti)**.**
Oletetaan, että f *on jatkuva pisteessä* $x_0 \in \mathbb{R}$ *ja derivoituva sen punkteeratussa ympäristössä* $U \setminus \{x_0\}$ *jollekin* x_0*:n ympäristölle* U*. Jos derivaatalla on* reaalinen *raja-arvo* $\lim_{x \to x_0} f'(x) = a \in \mathbb{R}$*, niin* f *on derivoituva myös* x_0*:ssa ja* $f'(x_0) = a$*.*

Integraalilaskennan peruslause

Lause 3.62 (Integraalilaskennan peruslause, IPL).
Jos $f\colon I \to \mathbb{R}$ *on* *välillä* $I \subset \mathbb{R}$ *derivoituva funktio ja jos* $f'(x) = 0$ *kaikille* $x \in I$, *jotka ovat välin sisäpisteitä, niin* f *on vakiofunktio.*

Korollaari 3.64. *Jos funktioilla* $F\colon I \to \mathbb{R}$ *ja* $G\colon I \to \mathbb{R}$ *on sama derivaatta-funktio* $F' = G'\colon I \to \mathbb{R}$ *ja jos* I *on* väli, *niin* on olemassa vakio $C \in \mathbb{R}$ *se.* $F(x) = G(x) + C$ *kaikille* $x \in I$.