Matemaattisen analyysin tukikurssi

5. kurssikerta (14.10.2019)

Sisäpiste

Määritelmä 4.4. Oletetaan, että $A \subset \mathbb{R}$ on joukko ja $x_0 \in A$ sen piste. Sanomme, että x_0 on A:*n sisäpiste*, jos x_0:lla on ympäristö U, joka sisältyy A:han. ■

Siis: x_0 on joukon A sisäpiste, jos A:sta löytyy **avoin** väli U johon x_0 kuuluu.

Käytännössä siis kaikki joukon pisteet paitsi reuna- ja erakkopisteet.

Funktion kasvavuus & vähenevyys 1

Määritelmä 4.1. Oletetaan, että $A \subset \mathbb{R}$. Kuvaus $f\colon A \to \mathbb{R}$ on

1. *kasvava*, jos kaikille $x, x' \in A$ pätee, että $x \leq x' \implies f(x) \leq f(x')$;
2. *vähenevä*, jos kaikille $x, x' \in A$ pätee, että $x \leq x' \implies f(x) \geq f(x')$;
3. *aidosti kasvava*, jos kaikille $x, x' \in A$ pätee, että $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$;
4. *aidosti vähenevä*, jos kaikille $x, x' \in A$ pätee, että $x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$.

Funktio f on *monotoninen*, jos f on kasvava tai vähenevä, ja *aidosti monotoninen*, jos f on aidosti kasvava tai aidosti vähenevä. ■

Funktion kasvavuus & vähenevyys 2

Lause 4.10. *Oletetaan, että $I \subset \mathbb{R}$ on väli ja $f\colon I \to \mathbb{R}$ on jatkuva funktio.*

(i) Jos $\exists\, f'(x) \geq 0$ kaikissa $\boxed{I\text{:n sisäpisteissä}}$ x, niin f on $\boxed{\text{kasvava } I\text{:ssä.}}$

(ii) Jos $\exists\, f'(x) \leq 0$ kaikissa $\boxed{I\text{:n sisäpisteissä}}$ x, niin f on $\boxed{\text{vähenevä } I\text{:ssä.}}$

(iii) Jos $\exists\, f'(x) \geq 0$ kaikissa I:n sisäpisteissä x ja jos f' ei ole vakiofunktio 0 millään positiivispituisella osavälillä $J \subset I$, niin f on aidosti kasvava I:ssä.

(iv) Jos $\exists\, f'(x) \leq 0$ kaikissa I:n sisäpisteissä x ja jos f' ei ole vakiofunktio 0 millään posit.pituisella osavälillä $J \subset I$, niin f on aidosti vähenevä I:ssä.

Lokaalit ääriarvot

Määritelmä 4.3. Oletetaan, että $f\colon A \to \mathbb{R}$ on reaalifunktio.

(i) Piste x_0 on f:n *lokaali minimikohta* ja arvo $f(x_0)$ on f:n *lokaali minimi*, jos $f(x_0)$ on pienin f:n arvoista jossakin x_0:n ympäristössä $U \subset A$.

(ii) Piste x_0 on f:n *lokaali maksimikohta* ja arvo $f(x_0)$ on f:n *lokaali maksimi*, jos $f(x_0)$ on suurin f:n arvoista jossain x_0:n ympäristössä $U \subset A$.

(iii) Piste x_0 on f:n *lokaali ääriarvokohta* ja arvo $f(x_0)$ on f:n *lokaali ääriarvo*, jos x_0 on f:n lokaali minimikohta tai lokaali maksimikohta.

(iv) Lokaali ääriarvo $f(x_0)$ on *aito*, jos x_0:lla on ympäristö U se. $f(x) \neq f(x_0)$, kun $x \in U$ mutta $x \neq x_0$. ■

Kohta: x_0 **Arvo:** $f(x_0)$ **Piste:** $(x_0, f(x_0))$

Globaalit ääriarvot

Globaalit ääriarvot määritellään kuten lokaalit ääriarvot, mutta ympäristön U sijasta tarkastellaan funktion koko määrittelyjoukkoa, eli myös reuna- ja erakkopisteitä.

Funktiolla voi siten olla globaali ääriarvo, vaikkei sillä olisi lokaaleja ääriarvoja!

Siis:

Lokaalit ääriarvot: tarkastele vain määrittelyjoukon **sisäpisteitä**.

Globaalit ääriarvot: tarkastele **myös** reuna- ja erakkopisteet.

Ääriarvotesti I

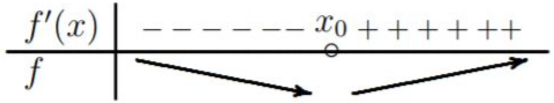
Lause 4.25 (Ääriarvotesti I: derivaatan merkki).

Oletetaan, että $A \subset \mathbb{R}$, x_0 on A:n sisäpiste ja $f \colon A \to \mathbb{R}$ on funktio. Jos f on jatkuva x_0:ssa ja derivoituva x_0:n $\boxed{\textit{punkteeratussa}}$ *ympäristössä ja derivaatta f' on siellä eri merkkinen pisteen x_0 eri puolilla, niin $f(x_0)$ on f:n lokaali ääriarvo.*
Lokaalin ääriarvon laatu:

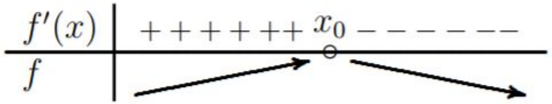
(i) *Jos on olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että $f'(x) < 0$, kun $x_0 - \delta < x < x_0$, ja $f'(x_0) > 0$, kun $x_0 < x < x_0 + \delta$, niin $f(x_0)$ on lokaali minimi.*

(ii) *Jos on olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että $f'(x) > 0$, kun $x_0 - \delta < x < x_0$, ja $f'(x_0) < 0$, kun $x_0 < x < x_0 + \delta$, niin $f(x_0)$ on lokaali maksimi.*

Laatuasia (sekä todistuksen idea!) ***karkeasti*** *merkkikaavioina:*

(i) 

$\Longrightarrow$ $f(x_0)$ *on lokaali minimi.*

(ii) 

$\Longrightarrow$ $f(x_0)$ *on lokaali maksimi.*

Ääriarvotesti II

Lause 4.27 (Ääriarvotesti II: toinen derivaatta).
Oletetaan, että $f\colon A \to \mathbb{R}$ *on kahdesti derivoituva* A*:n* $\boxed{\textit{sisäpisteessä } x_0}$ *ja että* $f'(x_0) = 0$. *Tällöin:*

(i) $f''(x_0) > 0 \implies f(x_0)$ *on lokaali minimi.*

(ii) $f''(x_0) < 0 \implies f(x_0)$ *on lokaali maksimi.*

Lokaalien ääriarvojen selvittäminen

1) Tutki, onko funktio **kahdesti derivoituva** – jos on, sovella ääriarvotestiä II:
   a) Selvitä ensimmäinen ja toinen derivaatta, siis f’ ja f’’.
   b) Etsi derivaatan nollakohdat, siis x:t jotka toteuttavat yhtälön $f'(x) = 0$.
   c) Tutki näissä kohdissa toisen derivaatan merkkiä. Jos
      $f''(x_0) > 0$ – funktiolla on lokaali minimi $f(x_0)$.
      $f''(x_0) < 0$ – funktiolla on lokaali maksimi $f(x_0)$.
      $f''(x_0) = 0$ – tutki tämä piste tarkemmin ääriarvotesti I:n avulla!
2) Jos ei kahdesti derivoituva, mutta kuitenkin **jatkuva**, sovella ääriarvotestiä I:
   a) Derivoi funktio.
   b) Etsi derivaatan nollakohdat ja kohdat joissa funktio ei ole derivoituva.
   c) Tutki derivaatan merkkiä näiden kohtien molemmin puolin. Jos
      $f'(x_0) < 0$ vasemmalla ja $f'(x_0) > 0$ oikealla puolella – funktiolla on lokaali minimi $f(x_0)$.
      $f'(x_0) > 0$ vasemmalla ja $f'(x_0) < 0$ oikealla puolella – funktiolla on lokaali maksimi $f(x_0)$.
      $f'(x_0)$ on samanmerkkinen molemmilla puolilla – $f(x_0)$ ei ole ääriarvo.

Globaalien ääriarvojen selvittäminen 1

JATKUVAN FUNKTION OPTIMOINTI SULJETULLA VÄLILLÄ

"Neljän askeleen ohjelma"

Oletukset: Funktio $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja $[a,b]$ on suljettu väli.

Tällöin f:n suurin ja pienin arvo ovat olemassa. Ne löytyvät seuraavilla askeleilla:

1° Laske $f(a)$ ja $f(b)$.

2° Laske f:n arvot niissä sisäpisteissä $x_0 \in]a,b[$, joissa f ei ole derivoituva *tai et tiedä*, onko f derivoituva.

3° Laske f:n arvot derivaatan f' mahdollisissa nollakohdissa $x_0 \in]a,b[$.

4° Poimi yllä lasketuista arvoista suurin M ja pienin m.

Nyt $M = \max f[a,b]$ ja $m = \min f[a,b]$.

Globaalien ääriarvojen selvittäminen 2

Jos tarkasteltava joukko ei ole suljettu väli:

1) Sovella “neljän askeleen ohjelmaa” muuten kuin päätepisteiden osalta.
1) Tutki funktion toispuoleinen raja-arvo avoimeksi jäävissä “päätepisteissä”.
2) Jos jokin raja-arvo on suurempaa kuin ohjelmalla saatu maksimikandidaatti, ei funktiolla ole suurinta arvoa.
3) Vastaavasti jos jokin raja-arvo on pienempää kuin ohjelmalla saatu minimikandidaatti, ei funktiolla ole pienintä arvoa.

(Vaihtoehtoisesti voi tutkia derivaatan merkkikaaviota, ja tehdä samantapaisia päätelmiä)

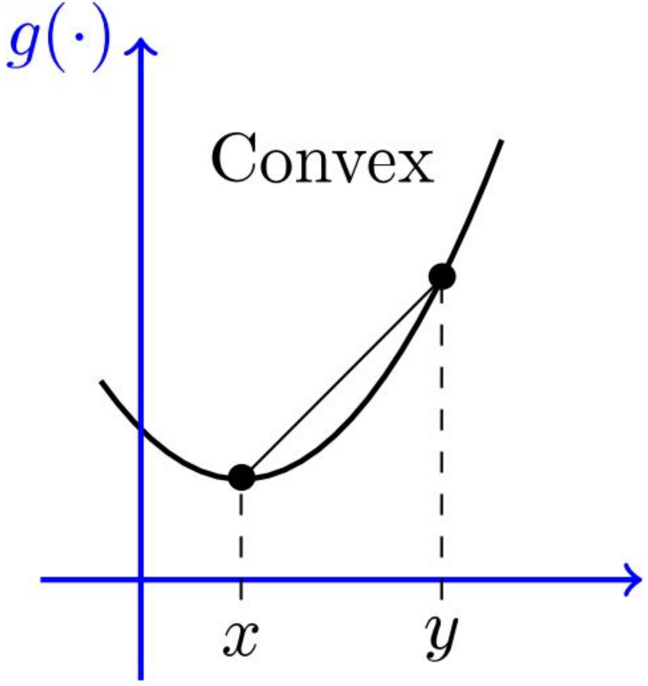
Konveksit ja konkaavit funktiot 1

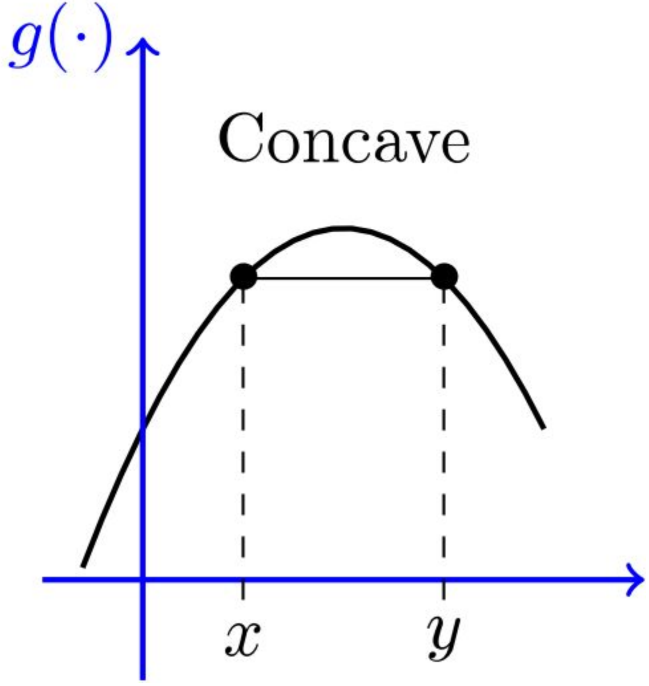
Määritelmä 4.6. Oletetaan, että $f\colon A \to \mathbb{R}$ on reaalifunktio ja $I \subset A$ $(\subset \mathbb{R})$ on väli. Sanomme, että f on *konveksi* (eli *alaspäin kupera*) *välillä* I, jos kaikille $x_1, x_2 \in I$, missä $x_1 < x_2$, pätee, että f:n kuvaaja välillä $[x_1, x_2]$ on pisteiden $(x_1, f(x_1))$ ja $(x_2, f(x_2))$ kautta kulkevan sekantin alapuolella (merkityks. "$\leq$").

Jos yllä tarkoitetussa epäyhtälössä "$\leq$" yhtäsuuruus ("$=$") on voimassa vain jokaisen osavälin $[x_1, x_2]$ päätepisteissä, on f *vahvasti konveksi välillä* I.

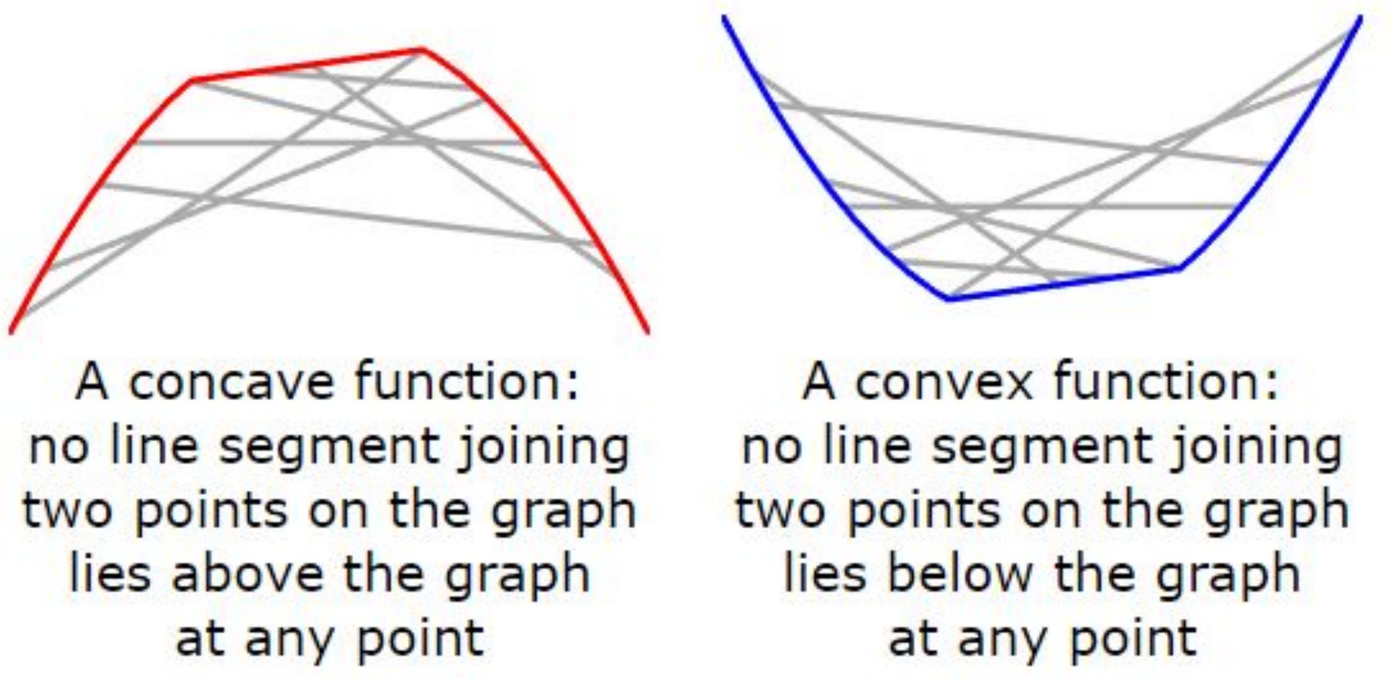
Vastaavasti määritellään käsitteet *konkaavi* (eli *ylöspäin kupera*) *välillä* I ja *vahvasti konkaavi välillä* I. ■

Konveksit ja konkaavit funktiot 2



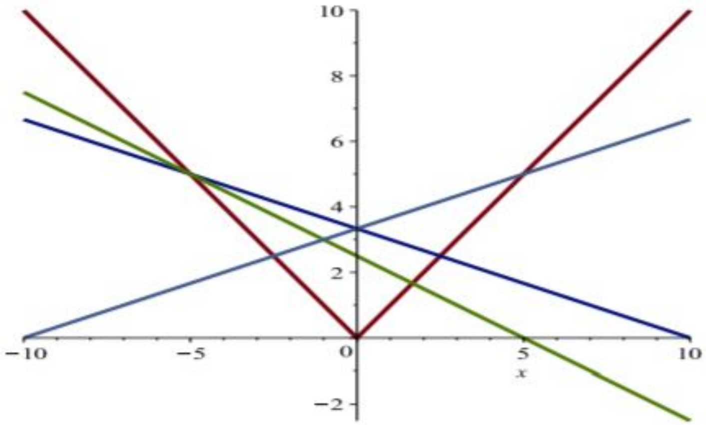


Konveksit ja konkaavit funktiot 3



Konveksi mutta ei vahvasti konveksi

Esimerkki 4.8.



Konveksit ja konkaavit **derivoituvat** funktiot

Lause 4.16. *Oletetaan, että* $I \subset \mathbb{R}$ *on <u>väli</u> ja* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *derivoituva.*

(i) *Jos* f' *on (aidosti) kasvava* I*:ssä, niin* f *on (vahvasti) konveksi* I*:ssä.*

(ii) *Jos* f' *on (aidosti) vähenevä* I*:ssä, niin* f *on (vahvasti) konkaavi* I*:ssä.*

(Derivaatta on jatkuva)

Lause 4.17. *Oletetaan, että* $I \subset \mathbb{R}$ *on <u>väli</u> ja* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *on jatkuvasti derivoituva.*

(i) *Jos* $\exists\, f''(x) \geq 0$ *kaikissa* $\boxed{I\text{:n sisäpisteissä}}$ x*, niin* f *on* $\boxed{\text{konveksi } I\text{:ssä.}}$

(ii) *Jos* $\exists\, f''(x) \leq 0$ *kaikissa* $\boxed{I\text{:n sisäpisteissä}}$ x*, niin* f *on* $\boxed{\text{konkaavi } I\text{:ssä.}}$

(iii) *Jos* $\exists\, f''(x) \geq 0$ *kaikissa* I*:n sisäpisteissä* x *ja jos* f'' *ei ole vakiofunktio* 0 *millään* I*:n positiivispituisella osavälillä, niin* f *on vahvasti konveksi* I*:ssä.*

(iv) *Jos* $\exists\, f''(x) \leq 0$ *kaikissa* I*:n sisäpisteissä* x *ja jos* f'' *ei ole vakiofunktio* 0 *millään* I*:n positiivispituisella osavälillä, niin* f *on vahvasti konkaavi* I*:ssä.*

Käännepisteet 1 (inflection point)

Määritelmä 4.7. Oletetaan, että $f\colon A \to \mathbb{R}$ on reaalifunktio ja $x_0 \in A$. Jos f on vahvasti konveksi jossakin x_0:n oikeanpuoleisessa ympäristössä ja vahvasti konkaavi jossakin x_0:n vasemmanpuoleisessa ympäristössä — tai päin vastoin —, niin x_0 on f:n *käännekohta* ja $\big(x_0, f(x_0)\big)$ on kuvaajan $y = f(x)$ *käännepiste*. ■

Käännepisteet 2

Lause 4.18. *Oletetaan, että* $I \subset \mathbb{R}$ *on väli,* x_0 *on* I*:n sisäpiste ja* f *on* I*:ssä kahdesti derivoituva. Tällöin pätee seuraavaa:*

(i) *Jos* x_0 *on* f*:n käännekohta ja* f'' *on siinä jatkuva, niin* $f''(x_0) = 0$.

(ii) *Jos* f'' *on kohdan* x_0 *eri puolilla eri merkkinen (positiivinen, negatiivinen) jossakin* x_0*:n ympäristössä, niin* x_0 *on* f*:n käännekohta.*