Matemaattisen analyysin tukikurssi

8. kurssikerta (12.11.2019)

Integrointisääntöjä

Lause 3.21. *Oletetaan, että funktiot f ja g ovat integroituvia yli välin $[a,b]$ sekä että α ja $\beta \in \mathbb{R}$. Tällöin seuraavat pätevät:*

(a) *Myös $\alpha f + \beta g$ on integroituva yli välin $[a,b]$, ja*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

(b) *Jos $f(x) \geq g(x)$ kaikille $x \in [a,b]$, niin*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Erityisesti: Jos $f(x) \geq 0$ kaikille $x \in [a,b]$, niin

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0\,.$$

Integrointisääntöjä

(c) *Jos* $a \leq c \leq b$, *niin*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Itse asiassa tämä kaava pätee riippumatta a*:n,* b*:n ja* c*:n järjestyksestä, kunhan* f *on integroituva yli laajimman kaavaan liittyvän välin.*

Lause 3.26. *Jos* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *on jatkuva, niin* f *on (rajoitettu ja) integroituva.*

Integraalilaskennan väliarvolause

Lause 3.29 (Integraalilaskennan väliarvolause — lyhyesti IVAL).
Jos $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *on jatkuva, niin on olemassa sellainen piste* $\xi \in [a,b]$, *että*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)\,.$$

Siis jos funktio on jatkuva jollain välillä [a,b], löytyy tältä väliltä sellainen piste, jossa funktion arvo = funktion arvojen keskiarvo välillä [a,b]

Analyysin peruslause 1

Lause 3.31 (Analyysin peruslause, osa 1 — lyhyesti APL/1). *Oletetaan, että f on jatkuva välillä I ja $a \in I$. Tällöin funktio $F\colon I \to \mathbb{R}$, jolle*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,, \tag{3.32}$$

on f:n antiderivaatta, *ts. funktio F on derivoituva ja $F'(x) = f(x)$ kaikille $x \in I$ (mahdollisissa päätepisteissä derivaatta on toispuoleinen).*

Otamme nyt käyttöön lauseeseen APL/1 perustuvan, kohtalaisen turvallisen antiderivaatan merkinnän, jossa funktion f minkä tahansa *antiderivaatan arvoa pisteessä x voidaan merkitä*

$$\int^x f(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{3.33}$$

Kolmiojutska

Huomautus 3.36. Funktiolle $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ pätevät seuraavat ominaisuuksien implikaatiot ja "epäimplikaatiot":

$$
\begin{tikzcd}
& \text{jatkuva} \arrow[dl, Rightarrow, shift right] \arrow[dr, Rightarrow, shift left] & \\
\text{integroituva} \arrow[ur, Rightarrow, shift right, "/" marking] \arrow[rr, Rightarrow, shift left, "/" marking] & & \text{antiderivoituva} \arrow[ul, Rightarrow, shift left, "/" marking] \arrow[ll, Rightarrow, shift left, "/" marking]
\end{tikzcd}
$$

Antiderivointisääntöjä

Lause 3.37. *Seuraavat kaavat erinäisten funktioiden f antiderivaatoille $\int^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pätevät välillä I — joka on mielivaltainen, ellei toisin sanota.*[13]

(1) $\displaystyle\int^x a\,\mathrm{d}t = ax + C \qquad$ (*a merkitsee vakiofunktiota*)

(2) $\displaystyle\int^x t^r\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{r+1}x^{r+1} + C \qquad$ ($r \neq -1$; *usein vain* $I \subset \,]0,\infty[$)

(3) $\displaystyle\int^x t^{-1}\,\mathrm{d}t = \int^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln|x| + C \qquad$ (*kaikille* $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$)

(4) $\displaystyle\int^x e^t\,\mathrm{d}t = e^x + C$

(5) $\displaystyle\int^x a^t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\ln a}a^x + C \qquad$ ($a > 0$, $a \neq 1$)

(6) $\displaystyle\int^x \sin t\,\mathrm{d}t = -\cos x + C$

(7) $\displaystyle\int^x \cos t\,\mathrm{d}t = \sin x + C$

(8) $\displaystyle\int^x \tan t\,\mathrm{d}t = -\ln|\cos x| + C \qquad$ (*kun* $I \subset \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$)

(9) $\displaystyle\int^x \cot t\,\mathrm{d}t = \ln|\sin x| + C \qquad$ (*kun* $I \subset \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$)

(10) $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \int^x (1 + \tan^2 t)\,\mathrm{d}t = \tan x + C \qquad$ ($I \subset \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$)

(11) $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sin^2 t} = \int^x (1 + \cot^2 t)\,\mathrm{d}t = -\cot x + C \qquad$ ($I \subset \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$)

(12) $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \overline{\mathrm{arc}}\sin x + C = -\overline{\mathrm{arc}}\cos x + C' \qquad$ ($I \subset \,]-1,1[$)

(13) $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \overline{\mathrm{arc}}\tan x + C = -\overline{\mathrm{arc}}\cot x + C'$

(*Kaavoissa (12) ja (13) vakioille on* $C' = C + \frac{\pi}{2}$, *koska* $\overline{\mathrm{arc}}\sin x + \overline{\mathrm{arc}}\cos x = \frac{\pi}{2} = \overline{\mathrm{arc}}\tan x + \overline{\mathrm{arc}}\cot x$.)

(14) $\displaystyle\int^x f'(t)\big(f(t)\big)^r\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{r+1}\big(f(x)\big)^{r+1} + C \qquad$ ($r \neq -1$) $\qquad$ (*ks. seur. sivu*)

(15) $\displaystyle\int^x f'(t)\big(f(t)\big)^{-1}\,\mathrm{d}t = \int^x \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t = \ln|f(x)| + C \qquad$ (*ks. seur. sivu*)

(16) $\displaystyle\int^x f'(t)e^{f(t)}\,\mathrm{d}t = e^{f(x)} + C \qquad$ (*ks. seur. sivu*).

Säännöissä (14)–(16) on f jokin välillä I derivoituva funktio; säännössä (14) on usein (eräille vakion r arvoille) lisäksi oletettava, että $f(t) > 0$ kaikille $t \in I$, ja säännössä (15), että $f(t) \neq 0$ kaikille $t \in I$. ■

Osittaisantiderivointi

Tulon derivoimissäännöstä

$$D(fg) = f'g + fg'$$

saadaan, *jos* $f'g$ ja fg' ovat *erikseenkin antiderivoituvia*, lauseen 3.8 avulla kaava

$$f(x)g(x) = (fg)(x) = \int^x f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int^x f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

ja tästä edelleen ns. *osittaisantiderivointisääntö*

$$\boxed{\int^x f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t \;=\; f(x)g(x) - \int^x f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t\,.} \tag{3.40}$$

Sitä voi yrittää soveltaa esittämällä antiderivoitava funktio h sopivalla tavalla tulona $h = fg'$. ***Mieti, miksi*** kaava (3.40) pätee *sopivin jatkuvuusoletuksin!*

Sijoituskeino: tapa 1

$$\int^{x} f(x)\,\mathrm{d}x = \int^{g^{-1}(x)} f\big(g(t)\big)\, g'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

1. Sijoitetaan x tilalle g(t) ja dx tilalle g'(t) dt.
2. Lasketaan antiderivaatta t:n suhteen.
3. Sijoitetaan lopputulokseen t:n paikalle $g^{-1}(x)$.

Sijoituskeino: tapa 2

$$\int^{x} k\big(h(x)\big)\, h'(x)\, \mathrm{d}x = \int^{h(x)} k(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

1. Sijoitetaan h(x) tilalle t ja h’(x) dx tilalle dt.
2. Lasketaan antiderivaatta t:n suhteen.
3. Sijoitetaan lopputulokseen t:n paikalle h(x).

(vähän sama kuin edellinen mutta “toisinpäin”)

Mielenrauhaa

Vaikka f:n antiderivaattaehdokas (tietyllä välillä I) olisi saatu *epämääräisin* tai muuten *epäilyttävin* keinoin, kuten

- soveltamalla kaavoja tarkistamatta oletuksia,
- soveltamalla kaavoja rikkoen(?) oletuksia (vrt. esimerkin 3.47.i tapa I välille $\mathbb{R}$),
- tietämättä, mitä oikein tekee,
- arvaamalla tai
- käyttämällä kontrolloimatonta ohjelmaa (laskimessa tai tietokoneessa),

lopputuloksen F voi osoittaa antiderivaataksi (mikäli se on) yksinkertaisesti *derivoimalla* sen ja toteamalla, että $F' = f$. Kaikki antiderivaatat välillä I saadaan sitten lauseesta 3.6.