Matemaattisen analyysin tukikurssi

9. Kurssikerta (19.11.2019)

Osamurtokehitelmä

Trigonometristen funktioiden antiderivointi

Jos $R(\sin x, \cos x)$ on $\sin x$:n ja $\cos x$:n *rationaalinen* lauseke, niin antiderivaattatehtävä

$$\int^x R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$$

palautuu <u>välillä $]-\pi, \pi[$</u> rationaalifunktion antiderivaattatehtäväksi sijoituksen

$$\tan\frac{x}{2} = t\,, \qquad x = 2\,\overline{\mathrm{arc}}\tan t\,, \qquad \text{“}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\,\text{”} \tag{3.55}$$

(ks. muistisääntö (3.46) ja sen alla) avulla. Tällöin ovat näet voimassa kaavat

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{ja} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,, \tag{3.56}$$

Trigonometristen funktioiden antiderivointi 2

Erikoistapaukset $R(x,y) = x^n$, $R(x,y) = y^n$: Muotoa $\int^x \sin^n t\,\mathrm{d}t$, $\int^x \cos^n t\,\mathrm{d}t$, missä $n \in \mathbb{Z}$, olevia antiderivaattoja voi laskea *monin tavoin:*

(a) Sijoitetaan $\tan\frac{x}{2} = t$ (jos n on parillinen, sijoitus $\tan x = t$ on parempi).

(b)
$$\int^x \sin^{2m+1} x\,\mathrm{d}x = \int^x \sin^{2m} x \sin x\,\mathrm{d}x = \int^x (1-\cos^2 x)^m \sin x\,\mathrm{d}x =$$

(Sijoitus $\cos x = t$, "$-\sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$".)

$$\overset{(3.45)}{=} -\int^{\cos x} (1-t^2)^m\,\mathrm{d}t,$$

jossa kohdefunktiona on polynomifunktio. (Oletukset? Pätevyysvälit?)

(c) Osittaisantiderivoinnilla voidaan johtaa palautuskaavat (joissa $n \geq 2$):

$$\int^x \sin^n t\,\mathrm{d}t = -\tfrac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \tfrac{n-1}{n}\int^x \sin^{n-2} t\,\mathrm{d}t\,,$$

$$\int^x \cos^n t\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \tfrac{n-1}{n}\int^x \cos^{n-2} t\,\mathrm{d}t\,.$$

Trigonometristen funktioiden antiderivointi 3

(d) Trigonometristen kaavojen käyttö.

Esimerkiksi $\int^x \cos^2 t \, \mathrm{d}t$ ja $\int^x \sin^2 t \, \mathrm{d}t$ voidaan helposti laskea kaavojen

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2} \qquad \text{ja} \qquad \sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$$

avulla (harjoitustehtävä). Edelleen esimerkiksi

$$\int^x \sin^4 t \, \mathrm{d}t = \int^x \left(\sin^2 t\right)^2 \mathrm{d}t = \int^x \left(\frac{1 - \cos 2t}{2}\right)^2 \mathrm{d}t$$

lasketaan loppuun samojen kaavojen avulla. ■

Trigonometristen funktioiden antiderivointi 3

Muotoa $\int^x \sin px \, \sin qx \, \mathrm{d}x$, $\int^x \sin px \, \cos qx \, \mathrm{d}x$ ja $\int^x \cos px \, \cos qx \, \mathrm{d}x$ olevat antiderivaatat voidaan laskea käyttämällä kaavoja

$$\begin{cases} \sin px \, \sin qx = \frac{1}{2}[\cos(p-q)x - \cos(p+q)x] \,, \\ \cos px \, \cos qx = \frac{1}{2}[\cos(p+q)x + \cos(p-q)x] \,, \\ \sin px \, \cos qx = \frac{1}{2}[\sin(p+q)x + \sin(p-q)x] \,. \end{cases} \tag{3.58}$$

Trigonometrisissä antiderivaattatehtävissä kannattaa yleensä hetki miettiä mahdollisuuksia kaavakokoelmista (MAOL) löytyvien kaavojen käyttöön ennen kuin esimerkiksi käyttää sijoitusta $\tan \frac{x}{2} = t$.

Analyysin peruslause 2

Lause 3.59 (Analyysin peruslause, osa 2 — lyhyesti APL/2).
Oletetaan, että $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *on jatkuvan funktion* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *antiderivaatta. Tällöin (on olemassa)*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; F(b) - F(a) \;\overset{\textit{merkitään}}{=}\; \Big/_a^b F(x)\,.$$

Osittaisintegrointi & sijoituskeino

Osittaisintegrointikaavaksi tulee (joudumme sivuuttamaan perustelun)

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = \Big/_a^b f(x)g(x) - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x\,, \tag{3.61}$$

mikäli f ja g ovat *derivoituvia* sekä f' ja g' *integroituvia* välillä $[a,b]$.

Sijoituskeinosta: Oletetaan, että $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on *jatkuva* ja $g\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$ *jatkuvasti derivoituva* kuvaus, jolle $g(\alpha) = a$ ja $g(\beta) = b$. Tällöin $(\exists)$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f\big(g(t)\big)\,g'(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{3.63}$$

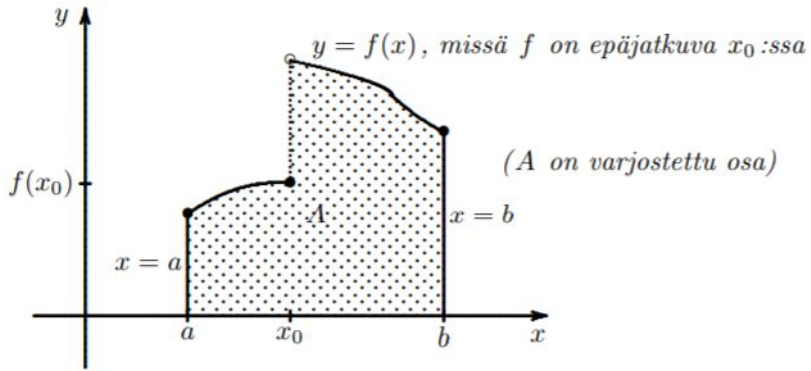
Pinta-alalaskentaa 1

Lause 3.69. *Oletetaan, että f ja g ovat välillä $[a, b]$ integroituvia funktioita (yleensä f ja g ovat sovelluksissa jatkuviakin).*

(a) *Jos $f(x) \geq 0$, niin kuvaajan $y = f(x)$ sekä suorien $y = 0$, $x = a$ ja $x = b$ rajoittamalla joukolla*

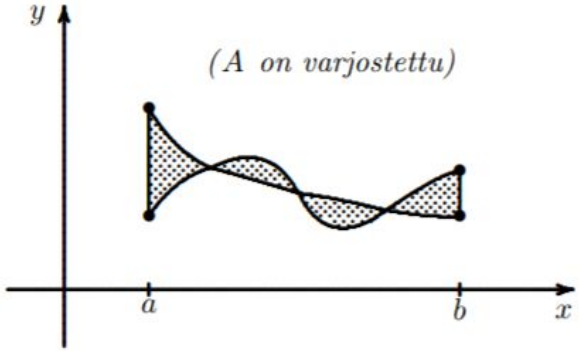
$$A = \{\, (x, y) \mid a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x) \,\} \qquad \textit{on ala} \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Kuva a-*kohdasta:*



Pinta-alalaskentaa 2

(b) *Kuvaajien* $y = f(x)$ *ja* $y = g(x)$ *sekä suorien* $x = a$ *ja* $x = b$ *rajoittamalla joukolla* $A = \{\, (x, y) \mid a \leq x \leq b,\ \ y$ *on* $f(x)$*:n ja* $g(x)$*:n* välissä $\}$ *on ala*

$$\int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| \mathrm{d}x\,.$$

Kuva b-*kohdasta* jatkuville f *ja* g*:*