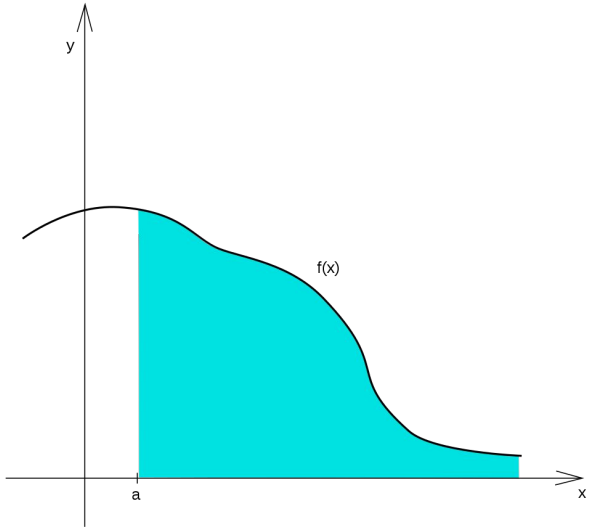
Matemaattisen analyysin tukikurssi

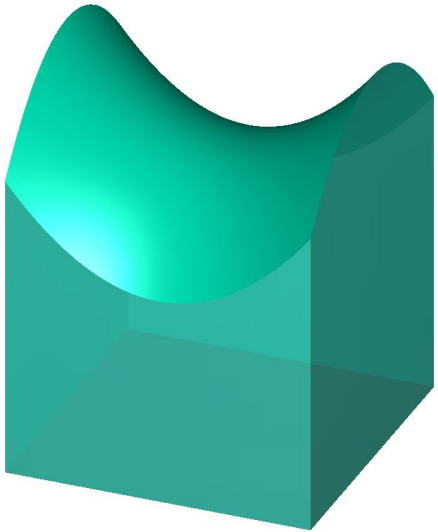
11. kurssikerta (3.12.2019)

Kahdesta kolmeen ulottuvuuteen

Yhden muuttujan integroinnissa laskettiin pinta-alaa käyrän alla tietyllä välillä:



Tasointegroinnissa lasketaan vastaavasti tilavuutta käyrän alla tietyllä tason alueella:



Tasointegraali suorakulmiossa

$$T = [a,b] \times [c,d] = \left\{ (x,y) \;\middle|\; a \leq x \leq b,\;\; c \leq y \leq d \right\}$$

Integrointialueena suorakulmio: jaot

Määritelmä 4.1. Oletetaan, että $a < b$ ja $c < d$. Suorakulmion $[a, b] \times [c, d]$ *jako* D tarkoittaa osasuorakulmioiden

$$T_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{i-1}, y_i] \qquad (i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, \ell)$$

kokoelmaa, missä $(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ on välin $[a, b]$ jako (ks. 3.12) ja $(y_0, y_1, \ldots, y_\ell)$ on välin $[c, d]$ jako. ■

Tässä virhe! Pitäisi olla $[\, y_{j-1}, y_j \,]$

Integrointialueena suorakulmio: summat

Määritelmän 4.1 tilanteessa merkitään $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ ja $a_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$, suorakulmion T_{ij} *geometrinen ala*, sekä

$$M = \sup fT, \qquad m = \inf fT, \qquad M_{ij} = \sup fT_{ij}, \qquad m_{ij} = \inf fT_{ij}$$

Määritelmä 4.2. Oletetaan, että $a < b$, $c < d$ ja $f\colon T = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ on *rajoitettu* funktio. Suorakulmion T jakoon D liittyy kolmenlaisia summia:

yläsumma $S_D = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\ell} M_{ij} a_{ij}$,

alasumma $s_D = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\ell} m_{ij} a_{ij}$ ja

Riemannin summat $R_{D,u} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\ell} f(u_{ij}) a_{ij}$ (valituille $u_{ij} \in T_{ij}$). ■

Integrointialueena suorakulmio: integraalit

Taaskin on $s_D \leq R_{D,u} \leq S_D$ ja kaikille T:n jaoille D_1 ja D_2 on $s_{D_1} \leq S_{D_2}$, ja saadaan määritellyiksi *reaaliluvut*

$$f\text{:n } \textit{alaintegraali} \quad \underline{I} = \sup_D s_D \qquad \text{ja} \qquad f\text{:n } \textit{yläintegraali} \quad \overline{I} = \inf_D S_D$$

Määritelmä 4.3 (Riemannin integraali suorakulmiossa).
Oletetaan, että $f\colon T \to \mathbb{R}$ on $\boxed{\text{rajoitettu}}$ funktio suorakulmiossa T. Jos $\underline{I} = \overline{I} = I$, niin f on *integroituva T:ssä* (eli *integroituva yli T:n*) ja luku

$$\int_T f = \int_T f \,\mathrm{d}a = \iint_T f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = I \qquad (\in \mathbb{R})$$

on *f:n tasointegraali yli T:n.* ■

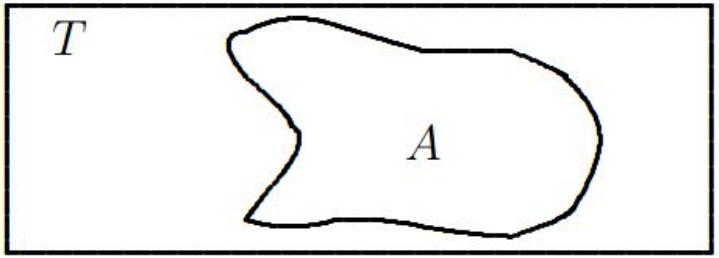
Tasointegraali rajoitetussa tasojoukossa

Nollajatko

Oletetaan, että $A \subset \mathbb{R}^2$ on *rajoitettu joukko,* ts. joukko, joka sisältyy johonkin tason suorakulmioon T. Oletetaan lisäksi, että $f\colon A \to \mathbb{R}$ *rajoitettu funktio.* Tällöin f:n *nollajatko* on funktio

$$f_0\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \qquad \text{missä} \quad f_0(x,y) = \begin{cases} 0\,, & \text{kun } (x,y) \notin A \\ f(x,y)\,, & \text{kun } (x,y) \in A \end{cases}.$$

Tällöin selvästi f:n nollajatko on rajoitettu koko tasossa $\mathbb{R}^2$ ja siten myös suorakulmiossa $T \supset A$ (jollaisia oletuksen nojalla on olemassa).



Riemannin integraali rajoitetussa tasojoukossa

Määritelmä 4.6 (Riemannin integraali yleisessä tasojoukossa)**.**
Oletetaan, että $f\colon A \to \mathbb{R}$ on rajoitettu funktio rajoitetussa joukossa $A \subset \mathbb{R}^2$. Sanomme, että f on *integroituva* yli A:n, jos sen nollajatko f_0 on integroituva yli jonkin sellaisen suorakulmion T, että $A \subset T$. Tällöin reaaliluku $\int_T f_0$ (sic!) on *f:n tasointegraali yli A:n* ja merkitään

$$\int_A f = \int_A f \,\mathrm{d}a = \iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_T f_0 \qquad (\in \mathbb{R})\,. \qquad \blacksquare$$

Pinta-ala & mitallisuus

Huomautus 4.8. Voidaan osoittaa, että rajoitetulla joukolla $A \subset \mathbb{R}^2$ on *pinta-ala*

$$a(A) = \int_A 1 = \iint_A 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \overset{\text{lyh.}}{=} \iint_A \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \qquad (\geq 0),$$

$\boxed{\text{jos ja vain jos}}$ vakiofunktio $1\colon A \to \mathbb{R}$ on integroituva yli A:n. Jos joukolla A *on* pinta-ala, sanomme myös, että A on *mitallinen* (Jordan-mitallinen). ■

Määritelmä 4.9 (Nollamittaisuus)**.** Oletetaan, että $C \subset \mathbb{R}^2$ on rajoitettu joukko. Joukko C on *nollamittainen*, jos C on mitallinen ja sen mitta $a(C) = 0$. ■

Käsitteitä

Määritelmä 4.11. [20] Oletetaan, että $A \subset \mathbb{R}^2$ ja $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ — tai, jos haluat, $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Siis tasojoukko A ja tason piste $\mathbf{r}_0$.

(i) Kaikille $\varepsilon > 0$ joukko

$$B_\varepsilon(\mathbf{r}_0) = \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2\ \} \tag{4.12}$$

($\mathbf{r}_0$-keskinen, ε-säteinen *kiekko* ilman reunaympyrää) on $\mathbf{r}_0$*:n* ε*-ympäristö.* Tai, jos haluat, voimme puhua $\mathbf{x}_0$:n r-ympäristöstä $B_r(\mathbf{x}_0)$ kaikille $r > 0$.

(ii) Piste $\mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}^2$ on joukon A

(a) *sisäpiste*, jos ympäristö $B_\varepsilon(\mathbf{r}_0) \subset A$ jollekin $\varepsilon > 0$;

(b) *ulkopiste*, jos ympäristö $B_\varepsilon(\mathbf{r}_0) \subset \mathbb{R}^2 \setminus A$ jollekin $\varepsilon > 0$;

(c) *reunapiste*, jos se ei ole sisä- eikä ulkopiste.

(iii) Joukon A *reuna* on

$$\partial A = \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \text{ on } A\text{:n reunapiste}\ \}. \qquad \blacksquare$$

Mitallisuudesta & integroituvuudesta

Lause 4.15. *Oletetaan, että joukko* $A \subset \mathbb{R}^2$ *ja funktio* $f : A \to \mathbb{R}$ *ovat rajoitettuja. Tällöin*

(1) *Joukko* A *on mitallinen,* $\boxed{\textit{jos ja vain jos}}$ *sen reuna* ∂A *on nollamittainen.*

(2) *Jos* A *on mitallinen ja* f *on jatkuva, niin* f *on integroituva yli* A*:n.*

(Samoin, vaikka f*:llä olisi epäjatkuvuuspisteitä, jos ne muodostavat nollamittaisen joukon.)*

(3) *Jos* $a(A) = 0$*, niin* f *on integroituva yli* A*:n ja* $\int_A f = 0$.

Siis jälleen jatkuvuus -> integroituvuus!

Tasointegraalin laskeminen käytännössä

Kuten aiemmin

Huomautus 4.18. Tasointegraalille pätee esimerkiksi (vrt. lause 3.21):
Kun tasojoukko $A \subset \mathbb{R}^2$ on mitallinen (*toisin sanoen:* reunaltaan nollamittainen) ja kun joukon A funktiot $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ ovat integroituvia (*esimerkiksi:* jatkuvia) — jolloin kaikki ovat perusoletusten mukaan rajoitettuja —, on olemassa

(i) $$\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g\,,$$

(ii) $$\int_A cf = c\int_A f\,, \qquad \text{kun } c \in \mathbb{R} \text{ on vakio,}$$

(iii) $$m \cdot a(A) \le \int_A f \le M \cdot a(A)\,, \qquad \text{kun } m = \inf fA \text{ ja } M = \sup fA\,,$$

(iv) $$\int_{A_1 \cup A_2} f = \int_{A_1} f + \int_{A_2} f\,, \qquad \text{kun } A_1 \text{ ja } A_2 \text{ ovat mitallisia sekä } a(A_1 \cap A_2) = 0.$$

Iteroitu integraali **suorakulmiossa**

Lause 4.19. *Oletetaan, että* $T = [a,b] \times [c,d]$ *on tason* $\mathbb{R}^2$ *suorakulmio ja että* $f\colon T \to \mathbb{R}$ *on integroituva. Jos* $\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y = g(x)$ *on olemassa kaikille* $x \in [a,b]$, *niin*

$$\int_T f = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x\,.$$

Vastaavasti jos $\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x = h(y)$ *on olemassa kaikille* $y \in [c,d]$, *niin*

$$\int_T f = \int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y\,. \qquad \blacksquare$$

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \overset{\text{merk.}}{=} \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d \mathrm{d}y\; f(x,y)$$

x- ja y-projisoituvuus

Määritelmä 4.23. Oletetaan, että g_1 ja g_2 ovat $\boxed{\text{jatkuvia}}$ reaalifunktioita välillä $[a, b]$ ja että $\boxed{g_1(x) \leq g_2(x) \text{ kaikille } x \in [a, b].}$ Kuvaajien $y = g_1(x)$ ja $y = g_2(x)$ sekä suorien $x = a$ ja $x = b$ rajoittama joukko

$$A = \{ (x, y) \mid a \leq x \leq b, \ g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \} \tag{4.24}$$

on *x-projisoituva.* Vastaavasti kuvaajien $x = g_1(y)$ ja $x = g_2(y)$ sekä suorien $y = a$ ja $y = b$ rajoittama joukko

$$B = \{ (x, y) \mid a \leq y \leq b, \ g_1(y) \leq x \leq g_2(y) \}$$

on *y-projisoituva.* ■

Iteroitu integraali **yleisessä rajoitetussa joukossa**

Lause 4.26 (Tasointegraalin laskulause). *Oletetaan, että*

$$A = \{\ (x,y) \mid a \le x \le b,\ \ g_1(x) \le y \le g_2(x)\ \}$$

on x-projisoituva (so. (1) g_1 ja g_2 jatkuvia ja (2) $g_1 \le g_2$) ja $f\colon A \to \mathbb{R}$ jatkuva. Tällöin

$$\exists \int_A f = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \mathrm{d}y\, f(x,y)\,.$$

Jos

$$A = \{\ (x,y) \mid c \le y \le d,\ \ h_1(y) \le x \le h_2(y)\ \}$$

on y-projisoituva (so. (1) h_1 ja h_2 jatkuvia ja (2) $h_1 \le h_2$), niin vastaavasti on

$$\exists \int_A f = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \mathrm{d}x\, f(x,y)\,. \qquad \blacksquare$$

Muuttujainvaihto tasointegraalissa

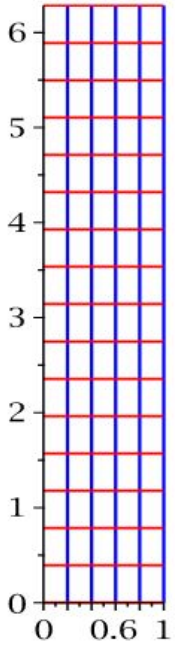
Napakoordinaattiesitys

Esimerkki 4.30 (Napakoordinaattiesitys TEKNISESTI).
Jokaisella tason pisteellä $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on *napakoordinaattiesitys*

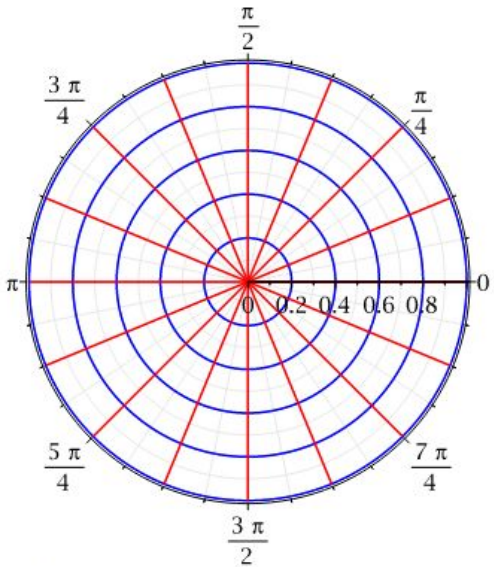
$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases} \qquad \text{joillekin } r \geq 0 \text{ ja } t \in [0, 2\pi[. \tag{4.31}$$

Kääntäen tällainen esitys (vaikka siinä sen sijaan, että $t \in [0, 2\pi[$, olisi $t \in \mathbb{R}$) aina antaa tason pisteen (x, y).

Napakoordinaattiesitys graafisesti



Suorakulmio $[0,1] \times [0,2\pi]$ *"$r\varphi$-tasossa"...*
Sinisillä r on vakio, punaisilla φ on vakio.



...sekä sen g-kuva "xy-tasossa".
Samoin on vakioisuus tässä!