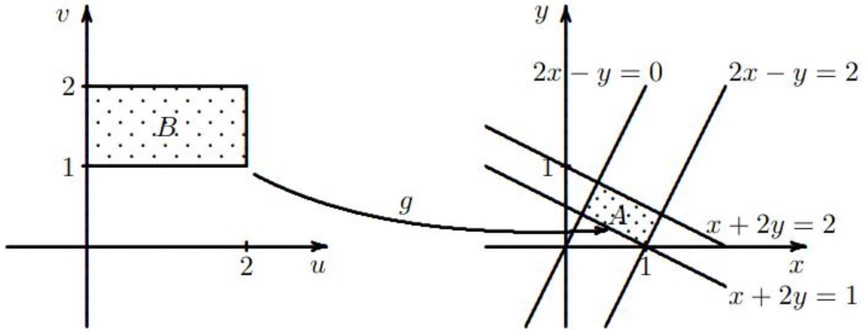
Matemaattisen analyysin tukikurssi

12. kurssikerta

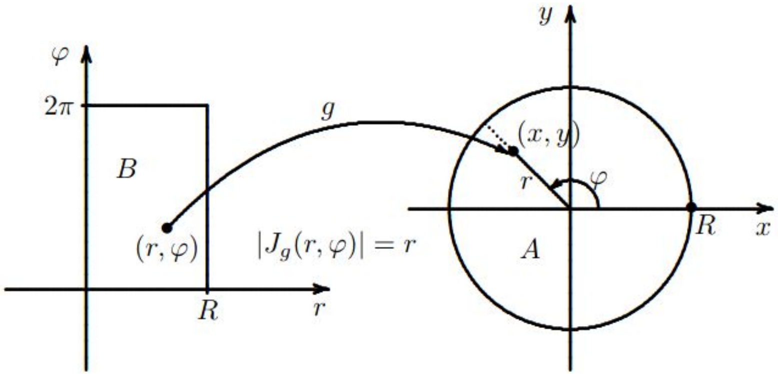
Muuttujainvaihto tasointegraalissa

Idea: muunnetaan hankala integrointialue helpoksi

Esimerkiksi vino suorakulmio suoraksi...



...tai kiekko suorakulmioksi:



Muuttujainvaihtokaava

Oletetaan (oikea kuva), että $f\colon A \to \mathbb{R}$ on integroituva tasojoukossa $A \subset \mathbb{R}^2$ (jolloin kummankin tiedetään olevan vähintäänkin *rajoitettu*[25]). Oletetaan vielä, että $g\colon B \to A$ on jatkuvasti derivoituva melkein bijektio, missä myös $B \subset \mathbb{R}^2$ on rajoitettu tasojoukko. Silloin on olemassa — vrt. edellä (3.67) eli $(*)$ —

$$\int_A f = \int_B (f \circ g)\,|J_g| \qquad \text{eli toisin kirjoittaen}$$

(4.33)

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_B f\big(g_1(u,v), g_2(u,v)\big)\,\big|J_g(u,v)\big|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,.$$

Melkein bijektio

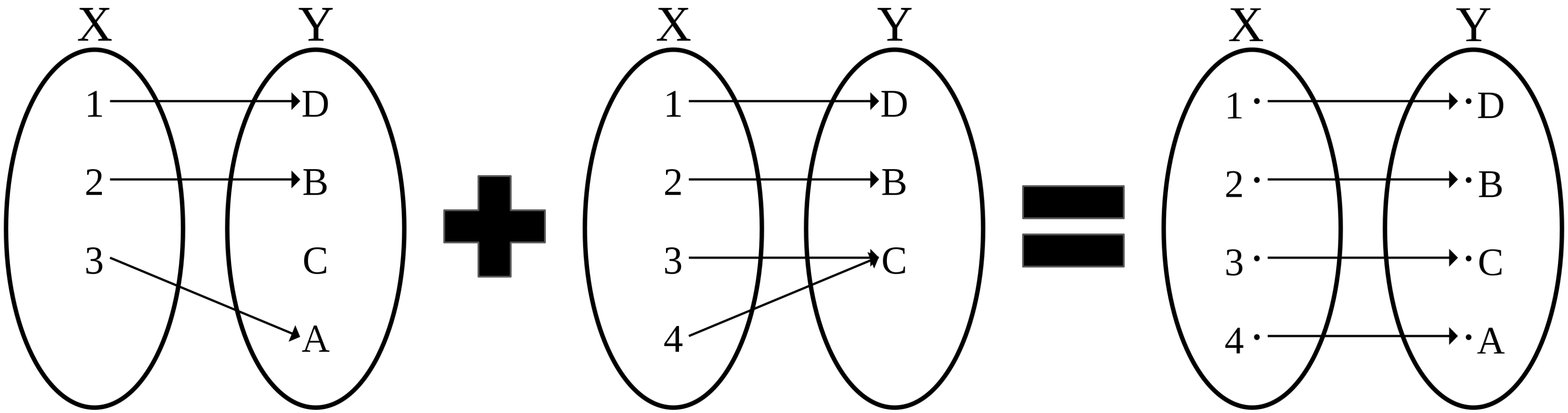
Määritelmä 4.35. Oletetaan, että $g\colon B \to A$ on funktio, missä B ja A ovat tasojoukkoja. Sanomme, että g on *melkein bijektio*, jos $\boxed{\text{joko}}$ g on injektio ja $A \setminus gB$ — tosin sanoen niiden A:n pisteiden joukko, jotka *eivät ole* g:n arvoja — on nollamittainen $\boxed{\text{tai}}$ g on surjektio ja ne A:n pisteet, joille g kuvaa useamman kuin yhden B:n pisteen, muodostavat nollamittaisen joukon. ■

Kuvauksen $g\colon B \to A$ melkein bijektiivisyys siis tarkoittaa, että *jompi kumpi* seuraavista on voimassa:

Injektio ja melkein surjektio: A:lla on nollamittainen[27] osajoukko, jonka pisteet (x, y) *eivät lainkaan* ole muotoa "$(x, y) = g(u, v)$ jollekin $(u, v) \in B$" mutta loput pisteet ovat *yksikäsitteisellä tavalla* tätä muotoa.[28]

Surjektio ja melkein injektio: A:lla on nollamittainen[27] osajoukko, jonka pisteet (x, y) ovat *monikäsitteisellä* tavalla muotoa "$(x, y) = g(u, v)$ joillekin $(u, v) \in B$" mutta loput pisteet ovat *yksikäsitteisellä tavalla* tätä muotoa.[29]

Injektio + surjektio = bijektio



Injektio **Surjektio** **Bijektio**

“Melkein” = funktio on kaikkialla muualla paitsi yksittäisissä pisteissä bijektiivinen.

Jacobin determinantti kahden muuttujan funktiolle

- Nyt $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, joka voidaan kirjoittaa muodossa $g(u,v) = (g_1(u,v), g_2(u,v))$
- Jacobin matriisi on matriisi, jonka alkiot koostuvat funktion g kaikista osittaisderivaatoista:

$$\begin{bmatrix} D_1 g_1 & D_2 g_1 \\ D_1 g_2 & D_2 g_2 \end{bmatrix}$$

- Jacobin determinatti on tämän matriisin determinantti:

$$J_g = \begin{vmatrix} D_1 g_1 & D_2 g_1 \\ D_1 g_2 & D_2 g_2 \end{vmatrix} = D_1 g_1 \cdot D_2 g_2 - D_2 g_1 \cdot D_1 g_2$$

Napakoordinaattiesitys

Esimerkki 4.30 (Napakoordinaattiesitys TEKNISESTI)**.**
Jokaisella tason pisteellä $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on *napakoordinaattiesitys*

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases} \qquad \text{joillekin } r \geq 0 \ \text{ ja } \ t \in [0, 2\pi[\,. \tag{4.31}$$

Käntäen tällainen esitys $\big($vaikka siinä sen sijaan, että $t \in [0, 2\pi[$, olisi $t \in \mathbb{R}\big)$ aina antaa tason pisteen (x, y).

Jos kiekon keskipiste on (x_0, y_0), ei välttämättä origo, käytetään muunnosta

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos\varphi \\ y = y_0 + r\sin\varphi \end{cases},$$

jossa kyseessä ovat *napakoordinaatit* “*napana*” (x_0, y_0).

Napakoordinaatit muuttujainvaihdossa

Muunnos g, jolle

$$g(r,\varphi) = \big(x(r,\varphi),\, y(r,\varphi)\big) = (r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)\,,$$

kuvaa "$r\varphi$-tason" suorakulmion $B = [0,R]\times[0,2\pi]$ *melkein bijektiivisesti* kiekolle $A = \bar{B}_R(\bar{0}) = \{\,(x,y)\,|\,x^2+y^2 \le R^2\,\}$. Katso ylle, alaluvun 4.3 alkua ja esimerkkejä 4.30 ja 4.32. Muunnoksen g Jacobin determinantti pisteessä (r,φ) on r:

$$J_g(r,\varphi) = \begin{vmatrix} D_1\,x & D_2\,x \\ D_1\,y & D_2\,y \end{vmatrix}(r,\varphi) = \begin{vmatrix} D_r(r\cos\varphi) & D_\varphi(r\cos\varphi) \\ D_r(r\sin\varphi) & D_\varphi(r\sin\varphi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$= r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r \qquad (\ge 0)\,.$$

(4.33) nojalla saadaan, kun $A = \bar{B}_R(\bar{0})$ on ym. kiekko, integroituvalle $f\colon A \to \mathbb{R}$ kaava

$$\int_A f = \iint_B f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,. \tag{4.38}$$

Avaruusintegraalit

Avaruuden $\mathbb{R}^3 = \{\,(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\,\}$ *suorakulmaisessa särmiössä*

$$T \;=\; [a, b] \times [c, d] \times [p, q] \;=\; \{\,(x, y, z) \mid a \le x \le b,\; c \le y \le d,\; p \le z \le q\,\}$$

määritellyn *rajoitetun* funktion $f\colon T \to \mathbb{R}$ integraali $\int_T f$

xy-projisoituvuus

Samastetaan $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ kuvauksen $(x, y) \mapsto (x, y, 0)$ välityksellä ts. ajatellaan, että $\mathbb{R}^2$ on $\mathbb{R}^3$:n "xy-taso". Joukko

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in A,\ c_1(x, y) \leq z \leq c_2(x, y) \} \tag{4.41}$$

on *xy-projisoituva*, jos (i) $A \subset \mathbb{R}^2$ on mitallinen, (ii) $c_1 \colon A \to \mathbb{R}$ ja $c_2 \colon A \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia sekä (iii) $\boxed{c_2 \geq c_1}$.

Avaruusintegraali iteroituna integraalina

Jos V on xy-projisoituva kuten yllä ja $f\colon V \to \mathbb{R}$ on jatkuva, niin on olemassa

$$\int_V f = \iint_A \left(\int_{c_1(x,y)}^{c_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \tag{4.42}$$

Lisäksi: Jos tässä mitallinen joukkomme A on edelleen x-projisoituva, siis muotoa $\{(x,y) \mid a_1 \le x \le a_2,\ b_1(x) \le y \le b_2(x)\}$ jatkuville $b_1, b_2\colon [a_1, a_2] \to \mathbb{R}$, joille $b_1 \le b_2$, avaruusintegraali $\int_V f$ palautuu *kolminkertaiseksi iteroiduksi integraaliksi*

$$\begin{aligned} \int_V f &= \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{b_1(x)}^{b_2(x)} \left[\int_{c_1(x,y)}^{c_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right] \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &\overset{\text{merk.}}{=} \int_{a_1}^{a_2} \mathrm{d}x \int_{b_1(x)}^{b_2(x)} \mathrm{d}y \int_{c_1(x,y)}^{c_2(x,y)} \mathrm{d}z\ f(x,y,z)\,. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Toisten muuttujien suhteen

Kaavoissa (4.41) ja (4.43) projektiosuunnat ovat vaihdettavissa tilanteen mukaan (esimerkiksi yz- ja zx-projisoituvat V, y- ja z-projisoituvat A ja niin edelleen).

Jos esimerkiksi — vrt. kaava (4.41) — joukko V on yz-projisoituva,

$$V = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y,z) \in B,\ d_1(y,z) \le x \le d_2(y,z) \,\},$$

ja jos B on z-projisoituva joukko $B = \{\, (y,z) \mid e_1 \le z \le e_2,\ g_1(z) \le y \le g_2(z) \,\}$ yz-tasossa, niin kaavan (4.43) integraali saadaan *oikein oletuksin* myös muodossa

$$\int_V f = \int_{e_1}^{e_2} \mathrm{d}z \int_{g_1(z)}^{g_2(z)} \mathrm{d}y \int_{d_1(y,z)}^{d_2(y,z)} \mathrm{d}x\ f(x,y,z),$$

ja joskus tämä voi olla helpompi laskea kuin (4.43) tai toisin päin.

Muuttujainvaihtokaava avaruusintegraalissa

Jos integraalissa $\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ halutaan siirtyä uusiin muuttujiin u, v, w jatkuvasti derivoituvan ja melkein bijektiivisen muunnoksen $g\colon B \to V$, jolle $g(u,v,w) = \big(x(u,v,w),\ y(u,v,w),\ z(u,v,w)\big)$, avulla, on jälleen muistettava *"kompensoida" mittojen paikallinen muuntuminen!* Tämän tekee g:n Jacobin determinantin

$$J_g = \begin{vmatrix} D_1x & D_2x & D_3x \\ D_1y & D_2y & D_3y \\ D_1z & D_2z & D_3z \end{vmatrix}$$

itseisarvo $\big|J_g\big|$. Kun $f\colon V \to \mathbb{R}$ on integroituva, saamme kaavan

$$(4.45) \qquad \int\limits_V f = \int\limits_B (f \circ g)\,|J_g|$$

$$= \iiint\limits_B f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big)\,\big|J_g(u,v,w)\big|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w\,.$$

Pallokoordinaattiesitys

$\mathbb{R}^3$:n kuulan $V = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$ pisteellä (x,y,z) on aina ns. *pallokoordinaattiesitys:*

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta, \qquad \text{missä}$$

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, pisteen (x,y,z) etäisyys origosta $(0 \leq r \leq R)$,

$\theta =$ pisteen (x,y,z) paikkavektorin ja pos. z-akselin välinen kulma $(0 \leq \theta \leq \pi)$,

$\varphi =$ projektiopisteen $(x,y,0)$ napakulma "xy-tasossa" $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$.

Pallokoordinaatit muuttujainvaihdossa 1

Muunnosfunktio:

Pallokoordinaattimuunnos $g\colon\ B = [0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \longrightarrow V$, missä

$$g(r, \theta, \varphi) \ = \ (x, y, z)(r, \theta, \varphi) \ = \ \big(r \sin\theta \cos\varphi,\ r \sin\theta \sin\varphi,\ r \cos\theta\big)$$

(katso kuvaa!), on srk. särmiön B *jatkuvasti derivoituva melkein bijektio* V:lle.

Pallokoordinaatit muuttujainvaihdossa 2

Jacobin determinantiksi tulee:

$$J_g(r,\theta,\varphi) = \begin{vmatrix} D_1\,x & D_2\,x & D_3\,x \\ D_1\,y & D_2\,y & D_3\,y \\ D_1\,z & D_2\,z & D_3\,z \end{vmatrix}(r,\theta,\varphi) = \begin{vmatrix} D_r\,x(r,\theta,\varphi) & D_\theta\,x(r,\theta,\varphi) & D_\varphi\,x(r,\theta,\varphi) \\ D_r\,y(r,\theta,\varphi) & D_\theta\,y(r,\theta,\varphi) & D_\varphi\,y(r,\theta,\varphi) \\ D_r\,z(r,\theta,\varphi) & D_\theta\,z(r,\theta,\varphi) & D_\varphi\,z(r,\theta,\varphi) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{laske!}}{=} \quad r^2\sin\theta \qquad\qquad (\geq 0)\,,$$

Pallokoordinaatit muuttujainvaihdossa 3

Jolloin muuttujainvaihtokaavaksi pallokoordinaateille saadaan:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= \int\limits_0^R \mathrm{d}r \int\limits_0^\pi \mathrm{d}\theta \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\; f(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)\cdot r^2\sin\theta\,.$$

Sylinterikoordinaattiesitys

Jos $V = \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq R^2,\ a \leq z \leq b \}$ on sylinteri eli lieriö, käytetään V:n pisteiden esittämiseen usein *sylinterikoordinaatteja* ρ, φ, z (lue: roo, fii, zet): Pari (ρ, φ) on projektion (x, y) "=" $(x, y, 0)$ napakoordinaattiesitys "xy-tasossa".

Sylinterikoordinaatit muuttujainvaihdossa

Muunnosfunktio

$$g\colon [0,R]\times[0,2\pi]\times[a,b]\to V,\qquad g(\rho,\varphi,z)=(x,y,z)=(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z)\,,$$

on *jatkuvasti derivoituva melkein bijektio*, ja

$$J_g(\rho,\varphi,z)=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\rho\qquad\qquad(\geq 0)\,,$$

joten saamme V:ssä integroituvalle funktiolle f kaavan (4.45) nojalla sylinterikoordinaattien muuttujainvaihtokaavan

$$(4.48)\qquad \int_V f=\int_B (f\circ g)\,|J_g|\qquad\qquad \text{eli}$$

$$\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_0^R \mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_a^b \mathrm{d}z\, f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z)\cdot\rho\,.$$