HELSINGIN YLIOPISTO
Opettaja työnsä tutkijana –tutkielma

Heini Ilmarinen, Niko Kaitarinne, Timo Sihvonen

Aliavaruuden käsitteenmuodostuksen ongelmat: Kurssitehtävien tekemisen vaikutus koetehtävämenestykseen Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I ja II –kursseilla Helsingin yliopistossa

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matematiikka
Toukokuu 2013

Sisältö

1 Johdanto

Lineaarialgebraa käsittelevä yliopistotasoinen kurssi suoritetaan yleensä hyvin pian matematiikan opiskelun alkamisen jälkeen. Tämän takia kurssin haasteena on sen sisällön lisäksi matemaattisen ajattelun kehittyminen, joka eroaa esimerkiksi lukiomatematiikassa tarvittavasta ajattelusta. Helsingin yliopistossa Lineaarialgebran ja matriisilaskennan kurssit olivat vuonna 2013 kurssien Analyysi I sekä Johdatus yliopistomatematiikkaan ohella ensimmäiset yliopistomatematiikan kurssit yliopiston alottaneille matematiikan opiskelijoille. Näiden kurssien matematiikan esitietovaatimuksena on matematiikan pitkä oppimäärä lukiossa, mutta kurssien aikana opitaan matematiisen tiedon systemaattinen rakentuminen alusta lähtien. Lineaarialgebra tuo yhteen metodeja geometriasta ja algebrasta, ja laajan aihealueensa lisäksi sen sovellukset matematiikassa ja niiden hallinta ovat olennaisia tulevissa matematiikan opinnoissa. Ne opettavat opiskelijoita matematiiseen ajatteluun ja esittää opiskelijalle hieman matematiikan aksiomaattista luonnetta, mutta se ei ole kurssien pääaihe.

Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II toteutettiin Helsingin yliopistossa syksyllä 2012 tehostetun kisällioppimisen menetelmällä ([6]), joka on kehitetty Helsingin yliopistossa Tietojenkäsittelyn laitoksen kisälliopetuksen pohjalta matematiikkaan soveltuvaksi. Tämän tutkimuksen tarkoituksena on analysoida opiskelijoiden harjoituksissa tekemien tehtävien määrää kokeessa saatuihin pisteisiin samaan aihepiiriin liittyvässä tehtävässä. Erityistä huomiota kiinnitetään koetehtävän pisteasteikon keskellä oleviin opiskelijoihin ja siihen, kuinka heidän ratkaisunsa rakentuivat ja missä vaiheessa tämän osalohkon osaaminen jää jälkeen täydet tai melkein täydet pisteet koetehtävästä saaneista opiskelijoista. Tavoitteena on kehittää kurssin sisällön painotusta siihen suuntaan, että keskivertojen opiskelijoiden yleiset ongelmakohdat tiedostetaan ja niihin aihepiireihin liittyvää opetusta tehostetaan tulevaisuudessa.

Tässä tutkimuksessa keskitymme aliavaruuden käsitteenmuodotukseen ja sen oppimisen vaikeuksiin. Tämä valittiin aiheeksi, sillä aikaisemmissa tutkimuksissa on huomattu opiskelijoilla oppimisen vaikeuksia juuri vektoriavaruuden käsitteen oppimisessa johtuen sen aksiomaattisesta luonteesta. Lisäksi vektoriavaruuksia käsitellessä opiskelija joutuu käyttämään erittäin monia kurssin aikana opittuja käsitteitä ja prosesseja. [7] Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I ja II –kursseilla vektoriavaruuden käsitettä ei käyty läpi tarkasti ja perusteellisesti, mutta aliavaruuden käsite käytiin. Tämän takia valitsimme juuri aliavaruuden emmekä vektoriavaruutta aiheeksemme, vaikka kyseiset käsitteet ovatkin lähellä toisiaan. Silti uskomme, että tuloksiamme voi hyvin verrata aikaisempiin tutkimuksiin vektoriavaruuksista, sillä niiden pohjalla ovat suurin piirtein samat käsitteet lukuunottamatta vektoriavaruuden listaa aksioomeista.

2 Teoriapohja ja edelliset tutkimukset

2.1 APOS-teoria

Matemaattiseen tiedon rakentumiseen ns. APOS-teorian liittivät Conttrill ym. ([2]). APOS-teoriassa eritellään neljä erilaista matemaattisen tiedon tasoa: toimenpidetaso (action), prosessitaso (process) ja objektitaso (object), sekä toimintamallitaso eli skeema (schema).

Toiminta (action) on mitä tahansa fyysistä tai mentaalista objektien muuttamista toisten uusien objektien saamiseksi. Se voi olla yksittäinen vaste, kuten muistaminen, tai monta vastetta peräkkäin. Usean vasteen tapauksessa ne tietyiltä osin ohjaavat eri asioiden muistamisen järjestystä, jolloin oppija itse on osa muutosta. Vasta toistaessaan ja reflektoidessaan toimintatasolla tapahtuvia muutoksia ne tulevat oppijalle tietoiseksi. Tällöin toiminta sisäistyy, ja se siirtyy prosessitasolle (prosess). Prosessin vaiheita osataan kuvailla niitä toteuttamatta ja ne voidaan irrottaa esimerkkitilanteista, toisin kuin toimintaa. Objektitasolla (object) prosessi aletaan nähdä kokonaisuutena, jolle voidaan tehdä muunnoksia ja joita voidaan luokitella niiden ominaisuuksien perusteella. Näiden luokittelujen avulla rakennetaan toimintamalleja (schema), jotka sisältävät toisiinsa liittyviä toimenpiteitä, prosesseja ja objekteja.

2.2 Matemaattisen tiedon rakentaminen

Jotta voimme puhua oppimisen vaikeuksista, meidän tulee määritellään miten tieto rakentuu oppijan mielessä. Kasvatustieteen tutkijat ovat tehneet useita teorioita tiedon rakentumisen luonteesta. Asiala ym. [1] aloittavat tiedon rakentamisen teorian siitä toteamuksesta, että mitä henkilö tietää tai pystyy tekemään ei välttämättä ole aina hänelle käytettävissään. Esimerkiksi opiskelija tehdessään koetta voi jättää jonkin tehtävän tekemättä kokonaan ja kuitenkin kokeen loputtua tietää täsmälleen kuinka tehtävä ratkaistaan. Tieto on ikään kuin opiskelijan tavoittamattomissa kokeen aikana, mutta kokeen loputtua se on taas käytettävissä. Samankaltainen ilmiö tapahtuu, kun opiskelijan mahdottomaksi luulema tehtävä ratkeaa helposti heti, kun opiskelijatoveri tai muu ohjaaja antaa pienen vihjeen oikeaan suuntaan. Voidaan siis yleistää tiedon rakentumiselle kaksi ongelmaa: käsitteiden oppiminen ja sen käyttöönotto tarvittaessa. [1]

Matematiikka on täynnä eri tilanteissa käytettäviä tekniikoita ja algoritmeja. Useat voivat oppia käyttämään näitä suhteellisen helposti, mutta matematiikan ymmärtämiseen liittyy paljon muutakin kuin vain erilaisten laskutoimitusten osaaminen, vaikka ne olisivat kuinka monimutkaisia. Tärkeämpää on käsitteiden ymmärtäminen, tuntuma ratkaisusta ennen jokaisen välivaiheen tekemistä, kyky käsitellä saman objektin eri esiintymismuotoja, yhteyksien näkeminen ja kokemusten luokitteleminen (matemaattisten ja ei-matemaattisten). Matemaattisen tiedon hallinta koostuu sellaisten kognitioiden luomisesta, jotka liittyvät läheisesti tiettyihin jo koettuihin ongelmatilanteisiin. Usein uuden matemaattisen tiedon rakentaminen lähtee vanhan tiedon rekonstruktiosta, jossa ennestään tutun ongelman ratkaisumallia käytetään olennaisilta osiltaan uuteen, mutta samankaltaiseen ongelmaan. Tämä liittyy läheisesti Piaget'n [9] määrittelyyn assimilaatiosta ja akkommodaatiosta. Matemaattinen tieto on siis yksilön taipumus vastata sosiaalista kontekstia unohtamatta esille tulleeseen ongelmatilanteeseen konstruoimalla, rekonstruoimalla ja järjestelemällä hänen mielessään matemaattisia prosesseja ja objekteja, joilla ratkaistaan ongelma. [1]

2.3 Yleistäminen

Yleistäminen on tärkeä osa yliopistotason matematiikan oppimista. Harel ja Tall [5] jakoivat yleistämisen matematiikassa kolmeen eri yleistämistapaan: Laajentava yleistäminen laajentaa tietorakennetta ilman, että opiskelijan tarvitsee muuttaa omaa skeemaansa; Rekonstruktioiva yleistäminen vaatii opiskelijaa muuttamaan omaa skeemaansa sopivammaksi uudelle tiedolle, jotta uusi asia sopisi siihen; ja Erillinen yleistäminen vaatii opiskelijalta uuden, erillisen skeeman luomista uudelle tiedolle, koska asia on opiskelijalle ennestään tuntematon.

Erillinen yleistäminen voi vaikuttaa hyvältä tavalta oppia, sillä se nopeuttaa uuden asian omaksumista. Sen ongelma on kuitenkin siinä, että luodessaan uuden skeeman opiskelija tottuu käyttämään tätä uutta skeemaa, ja kun asiayhteydet muihin skeemoihin myöhemmin ilmenevät, on opiskelijan vaikea sovitella erillisiksi uskomiaan skeemoja toisiinsa. Esimerkiksi siirtyminen avaruuksista $\mathbb{R}^2$ tai $\mathbb{R}^3$ avaruuteen $\mathbb{R}^n$ on laajentavaa yleistämistä, sillä siinä yksinkertaisesti käytetään aikaisemmin opittuja tekniikoita jokaiseen koordinaattiin laajemmassa systeemissä. Siirtyminen avaruudesta $\mathbb{R}^n$ vektoriavaruuden abstraktiin käsitteeseen vaatii erillistä yleistämistä, koska se on täysin uusi opiskelijalle. [5]

Kohdatessaan vektoriavaruuden käsitteen opiskelijalle esitetään lista aksioomista, joita käyttämällä yksityiskohtaisten ja vaikeiden välivaiheiden kautta saadaan selville vektoriavaruuden ominaisuuksista uusia asioita. Tämän suorittamiseen opiskelija tarvitsee läheistä ohjeistamista. Vektoriavaruuden aksiomaattisen yksinkertaistuksen hyöty on ilmeistä kuitenkin vain sen merkityksen jo ymmärtäneelle asiantuntijalle. Opiskelijan näkökulmasta itsestäänselvyyksien toteaminen aksiomaattisesti voi tuntua turhalta työltä, varsinkin jos hän ei sitä tehdessä opi käsitteellisesti mitään uutta. Vektoriavaruus matemaattisena käsitteenä liittyy opiskelijan mielessä aina läheisesti sen aksioomaattisuuteen, eikä sisällä sitä tietoa mitä vektoriavaruuden käsite tarkoittaa irrotettuna aksioomeistaan. [5]

2.4 Konkreettisesta abstraktiin

Vektoriavaruuden käsitteenmuodostuksen ja yleisesti lineaarialgebran keskeisimpiä ongelmia on konkreettisen muuttaminen abstraktiksi (Klapsinou & Gray, [4]). Esimerkiksi aikaisemmin opittu käsite vektori rajoittuu aluksi pelkästään vektoreihin avaruuksissa $\mathbb{R}^2$ tai $\mathbb{R}^3$. Vektoreita opiskeltaessa käytettään usein kirjoitetun muodon lisäksi kuvallista esitysmuotoa, joka helpottaa asian sisäistämistä. Kun myöhemmin siirryttään vektoreihin vektoriavaruudessa $\mathbb{R}^n$, niin opiskelijat edelleen yrittävät käyttää samaa ajatusmallia ja kuvittelevat jonkinlaisen viivan avaruudessa. Tämä jo opittu oppimistyyli vaikeuttaa abstraktimpaan matematiikkaan siirtymistä yliopistotasolla, varsinkin ensimmäisenä opiskeluvuotena. Vaikka lineaarialgebran teoria on yleisesti sovellettavissa, niin jotain tiettyä ongelmaa ratkaistaessa oppijan pitää päättää, mitä monista opituista ratkaisumenetelmistä käyttää ja mitä ei. Pelkästään tällainen useista mahdollisista ratkaisumalleista oikean valinta on jo suuri muutos aikaisemmin opittuun matematiikan tehtävien ratkaisumalliin, jossa oikeita tapoja ratkaista ongelmia on vain yksi valmiiksi harjoiteltu tapa.

2.5 Lineaarialgebran oppimisen vaikeudet

Lineaarialgebran oppimisen vaikeuksien tutkimus on vielä melko uusi tutkimusala, jonka ensimmäiset tutkimukset ovat 1980-luvulta. Tämä ei sinällään ole mikään yllätys, sillä lineaarialgebra tuli useissa maissa yliopistotason matematiikan aiheeksi vasta 1960-luvulla, osana modernin matematiikan uudistusta. Lineaarialgebran oppimisen vaikeuksien tutkimus keskittyi alkuaikoina Ranskaan ja Yhdysvaltoihin. Näiden maiden lineaarialgebran oppimisen ongelmien tutkimuksen näkökulmat ovat hieman erilaisia, sillä Ranskassa opetus on erittäin formaalia, kun taas Yhdysvalloissa opetus keskittyy lineaarialgebran työkaluihin ja yleensä käsitellään vektoriavaruutta $\mathbb{R}^n$. [3, s. xix–xxii] Lineaarialgebran oppimisen vaikeudet näyttävät kuitenkin keskittyvän molemmissa maissa samoihin aihepiireihin, jotka yleensä liittyvät suurimmilta osin lineaarialgebran moninaisiin esitysmuotoihin ja tarpeeseen käyttää montaa erilaista lineaarialgebran työkalua samassa tehtävässä. Lisää aiheesta löytyy esimerkiksi viitteestä [10].

3 Tutkimuksen lähtökohdat

3.1 Kurssijärjestelyt

Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I ja II ovat yliopiston perus- ja aineopintojen tasoiset kurssit, jonka matematiikan pää- ja sivuaineopiskelijat yleensä suorittavat matematiikan opintojensa alkuvaiheessa. Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II toteutettiin Helsingin yliopistossa syksyllä 2012 tehostetun kisällioppimisen menetelmällä. Ensimmäisellä kurssilla luentoja oli neljä tuntia viikossa ja toisella kurssilla niitä oli kolme tuntia viikossa. Kurssin laskuharjoitukset toteutettiin ns. kisälliopetuksen keinoin, eli kurssiin liittyviä laskuharjoituksia oli tarkoitus tehdä niiden tekemiseen tarkoitetuissa tiloissa ns. pajoissa. Näissä pajoissa oli laskuharjoitusten tekemisessä auttavia ohjaajia, joilta oli mahdollista pyytää henkilökohtaista ohjausta yhteensä lähes 30 tuntia viikossa. Toteuttamalla laskuharjoitukset tällä tavalla oppilaan on mahdollista käydä pajassa ja saada tarvitsemansa määrä henkilökohtaista ohjausta edeten viikon laskuharjoituksissa omalla tahdillaan. Laskuharjoitusten lisäksi molempien kurssien lopuksi tehtiin kurssikoe, joista tässä tutkimuksessa analysoidaan Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II –kurssikokeen neljättä tehtävää. Tämä kurssikoe muodostui viidestä tehtävästä, joista neljäs käsitteli aliavaruuksia. Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I –kurssin käsittely rajaantuu tässä tutkimuksessa aliavaruuden kannalta tärkeiden käsitteiden käsitteenmuodostusprosessiin, jota mitattiin laskuharjoituspisteiden avulla.

Viikoittaiset tehtävät oli pilkottu pienemmiksi osiksi, jolloin viikoittaisten tehtävien määräksi tuli 13-20. Pajassa vietetystä ajasta riippumatta kaikki oppilaat saivat palauttaa tekemänsä tehtävät ja saivat niistä lisäpisteitä, joilla pystyi korvaamaan kurssin koepisteitä. Tehtävien tekeminen ei ollut pakollista kurssin läpipääsemiseksi, mutta välttämätöntä kurssin sisällön ymmärtämiseksi. Kurssikokeesta oli siis mahdollista päästä läpi palauttamatta yhtäkään laskuharjoitusta. Kuitenkin kurssin sisällön ymmärtämistä varten opiskelija joutuu tekemään edes jonkin verran harjoitustehtäviä. Lisäpisteillä ja ohjaajilla tuettiin näiden tehtävien tekoa. Lisäksi viikottaisten laskuharjoitusten tekemisellä on paljon kauaskantoisempia vaikutuksia matematiikan oppimiseen kuin pelkällä kurssikokeeseen valmistautumisella.

Opiskelija merkitsi laskuharjoituksista tekemänsä tehtävät tehtävälappuun ja palautti kaikki omat ratkaisunsa tehtävälapun mukana. Tehtävät taulukoitiin kullekin oppilaalle, merkiten tehty tehtävä merkinnällä O. Näistä tehtävistä tarkistettiin tarkemmin tietyt tehtävät, ns. tähtitehtävät, jotka ovat etukäteen tiedossa opiskelijoilla. Jos tällainen tehtävä on opiskelijalla ensimmäisellä palautuskerralla väärin, on hänellä mahdollisuus palauttaa tehtävän korjaus kahden viikon aikana kaksi kertaa. Tutkimuksen osalta analyysit tehtiin niin, että O ja K-merkinnät olivat samanarvoisia eikä niiden välille tehty eroja. Tähtitehtävien eli tarkemmin tarkastettavien tehtävien taulukoinnissa käytettiin merkintöjä:

- O, tehtävän ratkaistu on oikein ensimmäisellä palautuskerralla,
- V, tehtävä on tehty väärin, ja
- K, tehtävä on korjattu oikein tarkistuskierroksilla.

Yksi olennainen osa opiskeluprosessia on palautteen saaminen opiskelijan tekemästä ratkaisusta ja mahdollisten virheiden omatoiminen ymmärtäminen ja korjaaminen. Jatkuva kaksisuuntainen palaute ja omien virheiden korjaaminen tukevat oppimista siten, että opiskelija saa käsityksen juuri omasta oppimistyylistään ja tyyppivirheistään. Myös muut harjoitustehtävät palautettiin tarkistettavaksi, mutta pisteiden saaminen ei edellyttänyt sitä, että ratkaisu oli oikea. Näissä tehtävissä tarkistusvastuu siirtyi opiskelijalle itselleen.

3.2 Tutkimuskysymykset

- Onko kurssin aikana tehtyjen harjoitustehtävien perusteella mahdollista arvioida, osaako opiskelija tehdä aliavaruuden kurssikoetehtävän?
- Mitkä ovat tyypillisiä virheitä, joita opiskelijat tekevät aliavaruuden käsitettä käsittelevässä kurssikoetehtävässä ja voidaanko näiden virheiden muodostuminen jäljittää joihinkin kurssin aikana tehtyihin tehtäviin?

4 Tutkimusmenetelmä ja analysointi

Seuraavassa luettelossa ovat lineaarialgebran oppimisen vaikeuksista ne, joihin keskitymme tässä tutkimuksessa. Luetellaan ne lyhyiksi alakohdiksi, jotta voimme liittää yhteen käsitteen ymmärtämisen tai tehtävän ratkaisun mahdollisiin oppimisen vaikeuksiin. Näitä ovat

(O1) käsitteiden käyttöönotto tarvittaessa,

(O2) käsitteiden ymmärtäminen,

(O3) tuntuma oikeasta ratkaisusta ennen varsinaista laskua,

(O4) kyky käsitellä saman asian eri esiintymismuotoja,

(O5) yhteyksien näkeminen ja luokitteleminen,

(O6) laajentava yleistäminen,

(O7) rekonstruktioiva yleistäminen,

(O8) erillinen yleistäminen,

(O9) käsitteen aksiomaattisuus,

(O10) konkretian muuttaminen abstraktiksi ja

(O11) oikean ratkaisumallin valinta.

4.1 Aineston keräys

Tutkimuksen aineistona käytettiin kurssien aikana kerättyjä taulukkoja tehdyistä tehtävistä sekä yhdessä kurssinvetäjän Johanna Rämön kanssa tehtyä kurssikokeen tehtävää, joka oli seuraava:

(a) Mitkä ovat vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruudet? Voit kuvailla aliavaruuksia omin sanoin, eikä vastauksia tarvitse perustella.

(b) Olkoon $W = \{(r - 2s, 4s, 3r - s)|r, s \in \mathbb{R}\}$. Osoita aliavaruuden määritelmän avulla, että W on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus.

(c) Etsi edellisen kohdan aliavaruudelle W jotkin virittäjävektorit.

(d) Mikä on aliavaruuden W dimensio? Muista perustella vastauksesi.

Tehtävän (a)-kohdasta maksimipistemäärä oli 2 pistettä, (b)-kohdassa 5 pistettä, (c)-kohdassa 4 pistettä ja (d)-kohdassa 3 pistettä. Koko tehtävästä pystyi siis saaman 14 pistettä.

Kurssien tehdyistä laskuharjoitustehtävistä analysoitiin ne, jotka liittyivät aliavaruuteen. Tehtävätyyppien kategorioita olivat

(H1) vektorien joukko-ominaisuudet (10 kpl),

(H2) vektorien lineaarikombinaatio (16 kpl),

(H3) vektorien virittäminen (17 kpl),

(H4) vektorien virittämä vektoriavaruus ja aliavaruus (12 kpl),

(H5) vektorien lineaarinen riippuvuus ja riippumattomuus (13 kpl),

(H6) vektoriavaruuden kanta (10 kpl),

(H7) vektoriavaruuden dimensio (4 kpl),

(H8) aliavaruuden määritelmä (15 kpl) ja

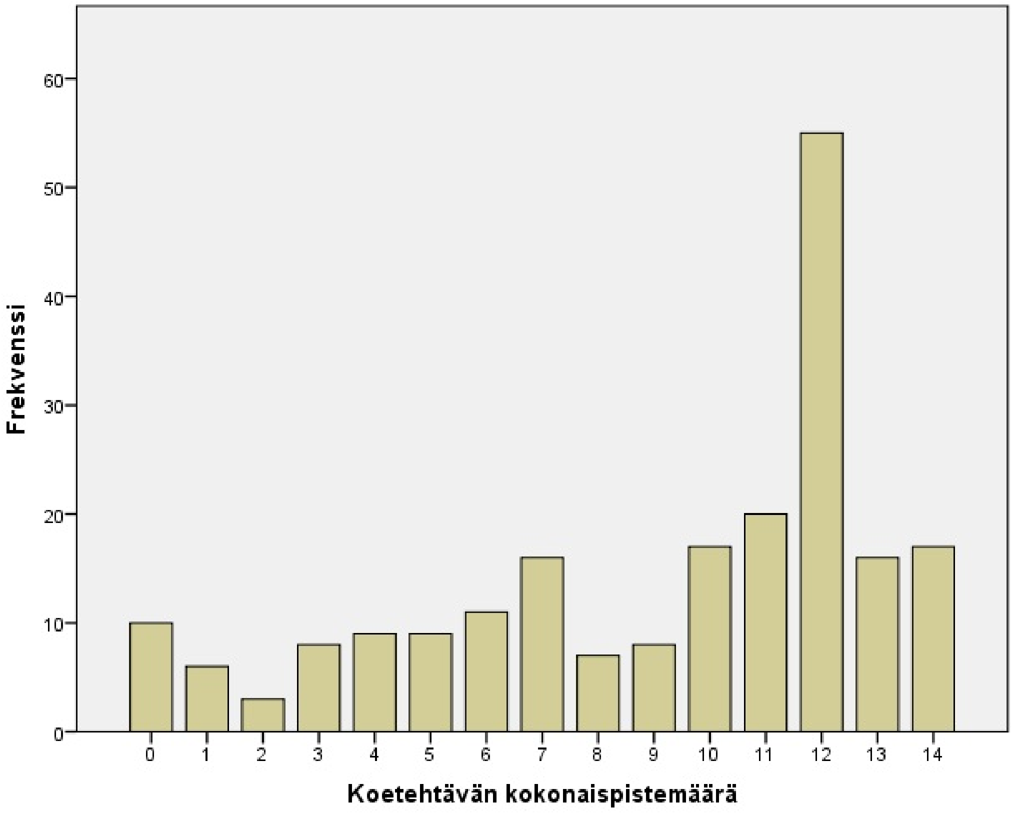
(H9) vektoriavaruuden kohtisuorakomplementti (7 kpl).

Tutkimukseen mukaan otetut tehtävät analysoitiin Johanna Rämön kanssa ja tämän palautteen pohjalta saatiin kasaan lopullinen tehtäväpaketti. Nämä tehtävät vielä jaoteltiin ylläoleviin kategorioihin.

Tämän jälkeen yksi ryhmän jäsen tarkisti ylläolleen tehtävän kokeesta, samalla keräten taulukkoa erilaisia tyyppivirheistä ja kyseisen tehtävän pisteistä. Muut ryhmän jäsenet tekivät myös omat tyyppivirhelistaukset, ja näiden listausten avulla päädyttiin lopullisiin tyyppivirheperusteisiin. Lopulta tehdyt tehtävät ja tyyppivirheiden esiintymiset kerättiin samaan taulukkoon ja kaikki mahdolliset oppilaiden tunnistetiedot hävitettiin.

4.2 Aineiston kuvailu

Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I -kurssilla ilmottautuneita oli 411 ja Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II -kurssilla ilmottautuneita oli 364. Kurssien aikana yhteensä 497 opiskelijaa kävivät molemmilla tai jommalla kummalla kurssilla. Näistä opiskelijoista 277 kävivät molemmat kurssit saman syksyn aikana ja heistä 212 oli loppukokeessa, jossa tutkimukseen käytettävä koekysymys oli. Näiden 212:n opiskelijan koevastaukset ja kurssien aikana tehtyjen tehtävien määrät muodostavat tutkimuksen aineiston.



Kuva 1: Koetehtävän pistemäärien frekvenssit.

Taulukko 1: Tehtävän ja sen alakohtien keskiarvot ja mediaanit

Tehtävä	Keskiarvo	Mediaani
Kaikki	9,05	11
(a)	0,39	0
(b)	3,50	4
(c)	3,26	4
(d)	1,91	3

Taulukosta 1 ovat esitettynä tutkimuksen tehtävän keskiarvot ja mediaanit. Opiskelijat jaettiin tutkimusta varten kolmeen eri ryhmään, eli tehtävästä

- pistemäärän 0-6 tehtävästä saaneisiin ($n = 56$),
- pistemäärän 7-11 tehtävästä saaneisiin ($n = 68$) ja
- pistemäärän 12-14 tehtävästä saaneisiin ($n = 88$).

Opiskelijat jaettiin näihin ryhmiin tutkimuskysymystämme varten. Frekvenssikuvaajasta 1 huomaamme, että 12 pistettä saaneiden määrä oli selvästi suurempi kuin muiden pistemäärien saaneiden. Päätimme ottaa tämän ryhmän vielä mukaan hyvin pärjänneiden joukkoon, sillä yleisesti (a)-kohdasta oli erittäin yleistä menettää kaksi pistettä, eikä niiden menettäminen mielestämme vielä tehnyt opiskelijasta keskivertoa opiskelijaa. Keskiverrosti ja heikosti menestystyneiden välinen rajan veto olisi voinut olla jossakin muussakin kohtaa, mutta ryhmämme päätti sen olevan valitussa kohdassa. Tällä valinnalla saimme myös ryhmistämme lähes yhtä suuret.

Tarkastustilanteessa yksi ryhmämme jäsenistä jaotteli opiskelijoiden tyyppivirheet koetehtävässä luoden samalla tyyppivirheluokituksensa. Tutkimusryhmän tyyppivirheperusteiden vertaisarvioinnissa muut ryhmän jäsenet rakensivat omat tyyppivirhelistauksensa noin viidenkymmenen kokeen perusteella. Molemmilla oli tarkasteltavan eri kokeet. Tyyppivirhelistauksien vertailun ja niistä keskustelun jälkeen päätimme muuttaa joitakin kohtia alkuperäisestä listauksesta. Koodilla A1 ollut tyyppivirhe jaettiin kahteen osaan, koska alkuperäinen tyyppivirhe oli aivan liian laaja ja epäkuvaileva. Alkuperäinen tyyppivirhe jaettiin osiin A1 ja A2. Lisäksi alkuperäisessä (b)-kohdan tyyppivirheitä oli kuusi erilaista, joista kolme yhdistettiin tyyppivirhekoodiksi B3, sillä kaikki alkuperäiset liittyivät jotenkin oletusten epämääräisyyteen. Tyyppivirhe A3 sisältää itseasiassa kaksi erillistä tyyppivirhettä, mutta niiden samankaltaisuuden takia ryhmämme päätti sisällyttää ne saman

Taulukko 2: Tyyppivirheiden luokittelu ja niiden esiintymismäärät ($n = 212$)

Koodi	Määrä	Tyyppivirheen luonnehdinta	Oppimisen vaikeus
A1	63	Opiskelija antoi pelkän aliavaruuden määritelmän ja yritti selittää sen pohjalta vektorien pysymisen aliavaruudessa.	O2, O3, O4, O8
A2	87	Opiskelija ei vastannut ollenkaan tai vastasi täysin ohi kysytystä aiheesta.	O1
A3	40	Tässä kohdassa on kaksi eri virhetyyppiä. Opiskelija joko unohti mainita jonkin aliavaruuden ($\{0\}$, $\mathbb{R}^3$ tai molemmat) tai suorien ja tasojen kulkemisen origon kautta.	O2, O3
B1	53	Opiskelija ei ole ymmärtänyt tai muistanut määritelmä osittain tai kokonaan.	O1
B2	9	Opiskelija ei ole kertonut, mitä hän osoittaa, vaan käy läpi aliavaruuden määritelmän kohdat ilman perusteita niiden käytöstä.	O2, O4, O6
B3	46	Oletuksissa ongelmia tai niitä ei ole ollenkaan (esim. Opiskelija valitsee oletusvektorit avaruudesta $\mathbb{R}^3$ joukon W sijaan tai opiskelija on käyttänyt vektoreiden sijasta joukkoja todistuksessa.)	O2, O3, O5
B4	5	Opiskelija ottaa esimerkkivektorit oletetusta aliavaruudesta ja yrittää todistaa sen aliavaruudeksi erikoistapauksella.	O10
C1	16	Opiskelija ei ole ymmärtänyt virittämistä.	O1, O2
C2	22	Opiskelija sijoittaa esimerkkilukuja muuttujien paikalle ja löytää näin virittäjiä, mutta ei tarkista vektorien oikeaa määrää.	O3, O4
C3	19	Opiskelija ei käytä joukkomerkintää vaan ratkaisee pelkästään vektoreilla.	O11
D1	35	Opiskelija ei tarkista virittäjävektorien lineaarista riippumattomuutta.	O3, O7
D2	44	Opiskelija ei tehnyt tehtävää tai ei ymmärrä ollenkaan dimensiota.	O2
D3	22	Sanoo vektorien olevan lineaarisesti riippumattomat, mutta ei osoita sitä millään tavalla.	O3, O5

tyyppivirheen alle, sillä molemmissa tyyppivirheissä oltiin unohdettu jotain kysytyistä aliavaruuksista.

Lopullinen tyyppivirhelistaus löytyy taulukossa 2. Kaikkien muiden paitsi (b)-kohdan tyyppivirheet ovat sellaisia, että opiskelija on voinut tehdä vain yhden kyseisistä tyyppivirheistä tai sitten saanut tehtävän oikein. Tämä helpotti kyseisten kohtien tyyppivirheanalyysien tekoa. Koetehtävän (b)-kohdassa kyseisenlaista jaottelua ei voitu tehdä tehtävän monimuotoisten vastausten takia.

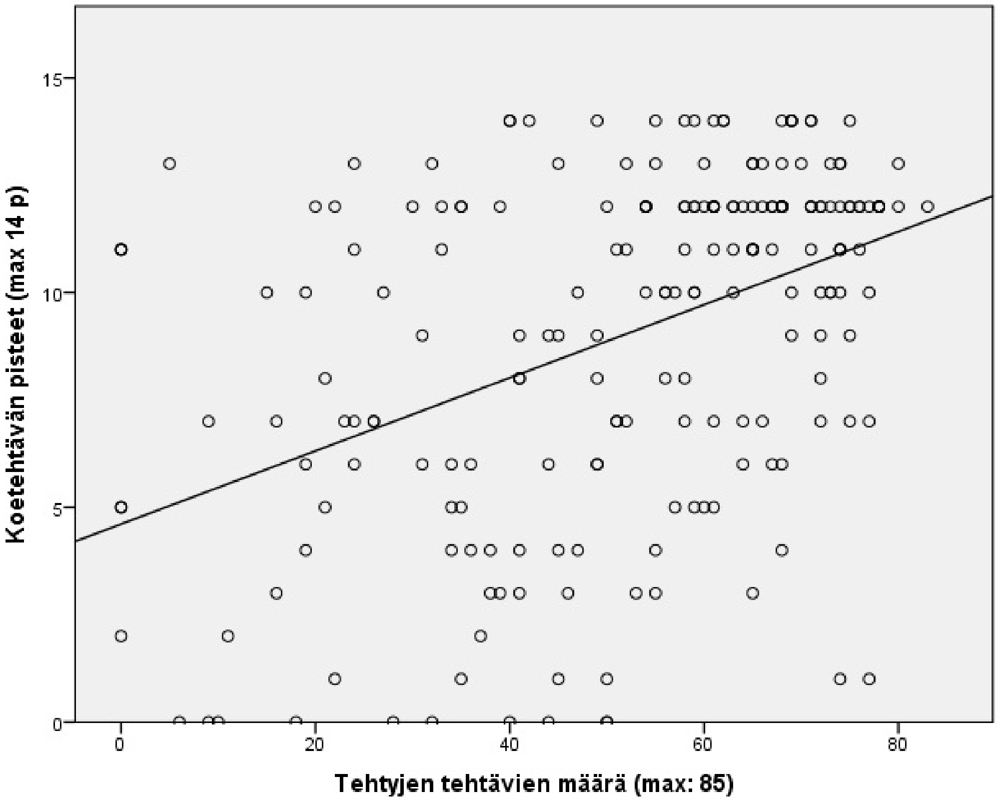
4.3 Ensimmäisen tutkimuskysymyksen analysointi

Ensin tutkimme, voidaanko kurssin aikana tehtyjen tehtävien määrästä arvioida suoriutumista aliavaruuteen liittyvässä koetehtävässä. Kuvaaja kurssin aikana tehdyistä tehtävistä, jotka liittyvät aliavaruuteen, ja tutkimuksen tehtävän koepisteistä löytyy kuvasta 2. Kun näille kahdelle muuttujalle tehtiin Spearmanin korrelaatiotesti (kumpikaan muuttujista ei ollut normaalisti jakautunut), niin korrelaatiokertoimeksi saatiin $r \approx 0{,}424$, joka on merkitsevä merkitsevyystasolla 0,01 (Liitteet, kuva 3). Näyttää siis siltä, että tehtyjen tehtävien ja koepisteiden välillä on kohtalainen riippuvuus. Vaikka korrelaatiokertoimesta ei yleensä voida päätellä mitään riippuvuuden suunnasta, niin tässä tapauksessa voimme olettaa tehtyjen tehtävien määrä selittää koepisteitä, sillä koe on tehty vasta kurssitehtävien jälkeen ja tehtävien tekeminen kurssin aikana yksi suurimmista oppimisen osa-alueista. Korrelaatiokertoimen neliönä saadaan kurssin aikana tehtyjen tehtävien selitystasoksi 18,0% koetehtävän menestyksestä.

4.4 Toisen tutkimuskysymyksen analysointi

Ensin lähdimme analysoimaan tarkemmin, ovatko 12-14 pistettä koetehtävästä saaneet opiskelijat tehneet jonkin tehtävätyypin H1-H9 tehtäviä enemmän verrattuna 7-11 pistettä koetehtävästä saaneisiin. Lähdimme testaamaan näiden ryhmien tehtävätyypeissä H1-H9 tehtyjen tehtävien keskiarvojen yhtäsuuruutta. Koska tehtyjen tehtävien varianssit eivät olleet missään tehtävätyypissä samat, eikä asiaa saatu korjattua logaritmoinnilla, niin lähdimme testaamaan keskiarvojen yhtäsuuruuutta Tamhanen T2 –testillä, jossa varianssien yhtäsuuruutta ei vaadita.

Tehtyjen Tamhanen T2 testien tulokset ovat liitteenä (kuvat 4, 5 ja 6). Eri pisteet saaneiden ryhmien tehtyjen tehtävien keskiarvot löytyvät taulukosta 3. Kun eri ryhmien keskiarvojen samuutta tarkastellaan Tamhanen T2- testillä, huomataan kaikkien eri ryhmien keskiarvoilla olevan erovaisuutta tilastollisesti merkittävästi 0,01 merkitsevyystasolla. Kun tarkastellaan tehtävätyyppikohtaisesti tehtyjen tehtävien keskiarvojen samuutta, huomataan 7-11 ja 12-14 pistettä saaneiden ryhmien välillä tehtyjen tehtävien keskiarvojen eroa 0,05 merkitsevyydellä olevan vektorien lineaarikombinaatioon



Kuva 2: Kurssin aikana tehdyt tehtävät suhteessa koepisteisiin.

(H2), vektorien virittämiseen (H3), lineaariseen riippuvuuteen (H5), vektoriavaruuden dimensioon (H7) ja aliavaruuden määritelmään (H8) liittyvissä tehtävissä (kuva 5). Vektorien joukko-ominaisuuksiin (H1), vektorien virittämiin vektoriavaruuksiin (H4), vektoriavaruuden kantaan (H6) ja vektoriavaruuden kohtisuoraan komplenttiin (H9) liittyvissä tehtävissä keskiarvot ovat tilastollisesti samansuuruisia (Liitteet, kuva 6).

Toisessa osassa tarkastellaan jonkin tyyppivirheen tehneiden eroa tyyppivirhettä tekemättömiin. Varianssianalyysilla saatiin tulokseksi, että (a)-kohdan tyyppivirheiden kohdalla oli joitakin merkittäviä eroja tehtyjen tehtävien keskiarvoissa. Yllättävin tulos oli se, että ne opiskelijat, jotka olivat tehneet jonkin tyyppivirheen mutta kuitenkin tehneet tehtävässä jotain (A1

Taulukko 3: Eri pistemäärät saaneiden tehtyjen tehtävien keskiarvot

Pisteet	Keskiarvo
0-6	39,04
7-11	51,51
12-14	61,07

ja A3), olivat tehneet merkittävästi enemmän tehtäviä aliavaruuden määritelmään liittyen (H8) kuin ne opiskelijat, jotka eivät tehneet tehtävässä mitään järkevää. Samaa eroa ei löytynyt tyyppivirhettä tekemättömillä ja ei mitään järkevää (a)-kohdassa tehneillä opiskelijoilla. Tehtävän oikein tehneet olivat tehneet enemmän tehtäviä kuin pelkän määritelmän antaneet vain vektoriavaruuden dimensioon (H7) liittyvissä tehtävissä. Tulokset ovat liitteiden kuvassa 7.

Tyyppivirheistä B2 ja B4 ei tehty testejä, sillä näitä virheitä tehneet lukumäärä oli erittäin pieni. Koetehtävän (b)-kohdan tyyppivirheanalyyseissä merkittävää eroa löydettiin niiden ryhmien välillä, jotka tekivät joitakin virheitä todistuksen oletuksissa (B3) ja jotka eivät tehneet oletuksissa virheitä. Oletuksissa virheitä tehneet olivat tehneet merkittävästi vähemmän tehtäviä liittyen vektorien virittämiseen, lineaariseen riippuvuuteen, vektoriavaruuden kantaan ja dimensioon sekä aliavaruuden määritelmään liittyen. Tulokset ovat liitteiden kuvassa 8.

Ne opiskelijat, jotka eivät osanneet koetehtävän (c)-kohdassa oikeastaan mitään, olivat tehneet vähemmän tehtäviä kuin tyyppivirheitä tekemättömät lähes kaikissa tehtävätyypeissä (H2-H9). Opiskelijat, jotka olivat sijoittaneet muuttujien paikalle, olivat tehneet vähemmän tehtäviä liittyen vektorien virittämiseen (H3), vektoriavaruuden dimensioon (H7) ja vektoriarvaruuden kohtisuoraan komplementtiin (H9) liittyen. Tulokset ovat liitteiden kuvassa 9. Joukkomerkinnän unohtaneet opiskelijat olivat tehneet kaikkia tehtäviä keskiarvollisesti yhtä paljon kuin ne, jotka eivät tehneet tyyppivirheitä.

Jos opiskelija ei ollut osannut ollenkaan (d)-kohtaa tai ei ollut tarkistanut virittäjävektorien lineaarista riippumattomuutta, niin hän oli tehnyt vähemmän tehtäviä kuin tyyppivirheitä tekemättömät lähes kaikissa tehtävätyypeissä (H2-H9). Ne opiskeljat, jotka olivat sanoneet vektorien olevan lineaarisesti riippumattomat mutta eivät osoittaneet sitä mitenkään, olivat tehneet vähemmän tehtäviä kuin tyyppivirheitä tekemättömät myös lähes kaikissa tehtävätyypeissä (H3-H9).

5 Tulosten analysointi ja pohdinta

5.1 Koetehtävä

Kappaleen 4 alussa listasimme lineaarialgebran oppimisen vaikeudet, joihin keskitymme tässä tutkimuksessa. Heti huomataan, että varsinkin koetilanteessa käsitteiden käyttöönotto tarvittaessa ja oikean ratkaisumallin valinta ovat olennaisimmat. Koetilanteen rajallisen ajan ja sosiaalisen kontekstin puuttumisen takia opiskelija voi hätääntyä, jolloin oppimisen vaikeudet eivät vaikuta opiskelijan taitoihin niin paljon kuin ympäristön epätavallisuus. Oletamme kuitenkin tässä tutkimuksessa, että opiskelijat ovat sen verran tottuneita kokeiden tekemiseen ettei sillä ole varsinaiseen lopputulokseen kovin suurta vaikutusta.

Koetehtävän (a)-kohta oli monelle opiskelijalle hankalin tehtävä sen epätavallisen luonteen takia, josta kertoo myös (a)-kohdan keskiarvo ($\overline{x}_a \approx 0,39$) ja mediaani ($M_a = 0$). Matematiikassa, varsinkin lukiotasolla, harvoin joutuu selittämään omia käsityksiään kokeessa. Kokeen a)-kohdassa suurin oppimisen vaikeus on konseptin ymmärtäminen, sillä moni opiskelija (64) antoi aliavaruuden määritelmän osaamatta selittää sitä tai ymmärtämättä mitä aliavaruuden käsite tarkoittaa. Toisin sanoen aliavaruuden käsitteen yleistäminen oli jäänyt erilliseksi, sillä sitä ei osattu yhdistää tehtävän vektoriavaruuteen $\mathbb{R}^3$, eikä käsitteen aksiomaattisuudesta oltu osattu irrottautua.

Tehtävän (a)-kohta erosi suuresti (b)- ja (c)-kohdista, sillä nämä olivat enemmän laskuharjoituksissa tehtyjen tehtävien kaltaisia: annetaan jokin vektoriavaruus, joka pitää osoittaa jonkin vektoriavaruuden aliavaruudeksi. Oikean ratkaisumallin valinta ei ollut vaikeaa, kunhan opiskelija muisti aliavaruuden aksiomaattisen määritelmän. Koska kysymys on muotoa ”osoita, että..”, niin tuntuma oikeasta ratkaisusta oli selkeää niille, jotka osasivat lukea tehtävänannon tarpeeksi hyvin. Lisäksi tehtävän suoraviivaisuuden takia yleistämisen tasoksi riittää laajentava yleistäminen. Suurin kompastuskivi (b)- ja (c)-kohtien ratkaisuissa oli käsitteiden ymmärtäminen ja muistaminen, sillä niissä tuli kaikkein eniten virheitä tyyppivirheluokittelujen mukaan. Etenkin (b)-kohdassa oletusten puuttumiset kielivät siitä, että nämä opiskelijat eivät kurssin aikana ole luoneet itselleen objekti- ja skeematason näkemystä aliavaruuden käsitteestä. Tällöin vain muistetaan toimintatasolla minkälaisia algoritmeja todistamisessa tulisi käyttää, mutta ei ymmärretä näitä laajemmassa kontekstissa.

Konkreettisen muuttaminen abstraktiksi ja yhteyksien näkeminen vaikuttivat (d)-kohdan ratkaisuun. Ongelmaksi monella opiskelijalla muodostui tehtävänannon jälkimmäinen osuus, jossa vaadittiin perusteluita omalle vastaukselleen, eli käsitteiden yleistämistä. Toinen ongelma oli se, että kysymyksessä ei mainittu lineaarisen riippumattomuuden tarkistamista, vaikka se on olennaista dimensiota selvitettäessä. Käsitteet jäävät toisistaan irrallisiksi laskusäännöiksi, joita ei osata yhdistää ja ymmärtää kontekstin ulkopuolella.

5.2 Tehtävien tekemisen vaikutus koemenestykseen

Ensimmäisen tutkimuskysymyksen analyysissä havaitsimme kohtalaista korrelaatiota tehtävien tekemisen ja koemenestyksen välillä. Tämä on odotettavissa oleva tulos, sillä tehtävien tekeminen oli suuri osa kurssin opiskelua, jolloin enemmän tehtäviä tehneet oppivat opiskeltavat käsitteet keskimäärin paremmin. Lisäksi tällä kyseisellä kurssilla tehtävät tehtiin erityisesti tukemaan oppimista, mikä on yksi matematiikan kisälliopetuksen perusperiaatteista. Lisätutkimuskohteena voisi tarkastella sitä, miten kisälliohjauksessa käyminen vaikuttaa oppimiseen yleisesti tai esimerkiksi juuri aliavaruuden käsitteen oppimiseen. Lisäksi voisi tutkia, onko mahdollisuudesta tehdä korjaukseen menneet tehtävät uudestaan hyötyä oppimisen kannalta.

5.3 Tyyppivirheet

Analysoidessamme opiskelijoiden koetehtävässä tehtyjä tyyppivirheitä huomasimme, että tyyppivirheen A3, jossa opiskelija oli kirjoittanut (a)-kohtaan aliavaruuden määritelmän ja sitä kautta yrittänyt selittää jotain vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruuksista, tehneet opiskelijat olivat tehneet huomattavasti vähemmän tehtäviä kurssin aikana vektoriavaruuden dimensioon liittyen kuin ne, jotka eivät tehneet kyseistä tyyppivirhettä.

Määritelmää käsitelleet ovat siis ehtineet luomaan itselleen selkeämmän skeeman vektoriavaruuksista ja etenkin dimensiosta, jolloin heidän ajattelunsa on syvällisempää ja heidän taitonsa tajuta määritelmän sisältö ovat parempia kuin dimensioon liittyviä tehtäviä tekemättömillä. Näyttäisi siltä, että määritelmän tarjonneet opiskelijat olisivat vielä vektoriavaruuden käsitteenmuodostuksessa objektitasolla, jolloin vektori- ja aliavaruus ovat vielä pelkkä kokoelma aksiomaattisia sääntöjä ja niiden pyörittelyä. Vaikka dimensioon liittyneitä tehtäviä oli kurssin aikana vähän, niin niitä tehneet olivat saaneet selvästi selkeämmän kuvan aliavaruuksista. Opiskelijat ehkä ajattelivat dimensiota konkreettisten vektoriavaruuksien $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$ avulla, jolloin heidän käsityksensä juuri vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruuksista myös vahveni ja aliavaruuden skeema vahvistui.

Koetehtävän (b)-kohdan analyysissa huomattiin, että jos opiskelijalla oli oletuksissa joitakin virheitä, hän oli tehnyt tehtäviä vähemmän liittyen vektorien virittämiseen, lineaariseen riippuvuuteen, vektoriavaruuden kantaan ja dimensioon sekä aliavaruuden määritelmään. Nämä tehtävätyypit ovat tärkeä osa opiskelijan siirtymistä konkreettisesta abstraktiin ajatteluun, sillä ne vaativat paljon erilaisten määritelmien ja aksioomien yhdistelemistä. Tämä kehittää oppilaan abstraktia ajattelua ja lisää täten hänen mahdollisuuksiaan ymmärtää todistuksen luonne.

Koetehtävän (c)-kohdan tyyppivirheanalyysissa saimme melko selvän tuloksen siitä, että ne jotka eivät osanneet tehdä (c)-kohdassa mitään järkevää, olivat tehneet lähes kaikissa tehtävätyypeissä vähemmän tehtäviä kuin tyyppivirheitä tekemättömät. Rutiini (c)-kohdan tyyppisiin tehtäviin syntyy juuri tekemällä tehtäviä liittyen vektorien erilaisiin esitysmuotoihin. Muuttujien paikoille arvoja sijoittaneet olivat tehneet tehtäviä vähemmän verrattuna tehtävän oikein tehneisiin opiskelijoihin vektorien virittämiseen, vektoriavaruuden dimensioon ja vektoriavaruuden kohtisuoraan komplementtiin liittyen. Näistä selkeimmin tehtävään liittyi juuri vektorien virittäminen, sillä kurssin aikana tehtiin monta koetehtävän tyyppistä tehtävää. Näiden tehtävien tekeminen lisäsi niitä tehneiden opiskelijoiden rutiinia ja ymmärrystä vektoreista virittäjinä. Tämä sai heidät ymmärtämään, että pelkkä arvojen sijoittaminen ei kertonut vielä tarvittavien virittäjävektorien määrää.

Tehtävän (d)-kohdassa tulokseksi saatiin, että jos oli tehnyt minkä tahansa tyyppivirheen, niin oli tehnyt lähes kaikissa tehtävätyypeissä vähemmän tehtäviä kuin tyyppivirheitä tekemättömät. Erona tyyppivirheitä tehneillä oli se, että ne, jotka olivat saaneet jotain järkevää vastattua tehtävään, olivat tehneet enemmän harjoitustehtäviä lineaarikombinaatioon liittyen kuin tehtävän väliin jättäneet. Todennäköisesti lineearikombinaation ymmärtäminen on auttanut opiskelijoita tekemään edellisen kohdan, jolloin tehtävän alkuosaan tarvitsi osata laskea vain virittäjävektorien määrä (c)-kohdassa. Jotkut olivat myös muistaneet että lineaarinen riippumattomuus pitää mainita, mutta tässä vaiheessa ero tyyppivirheitä tekemättömiin tuli. Enemmän tehtäviä tehneet ymmärsivät paremmin matematiikan luonteen, jossa väitetyt asiat tulee myös osoittaa todeksi. Tämän ymmärtämiseen vaaditaan suurempaa työmäärää, joka tällä kurssilla liittyy juuri tehtävien tekemiseen.

5.4 Ehdotukset kurssin kehittämiseksi

Toisen tutkimuskysymyksen analysoinnissa huomasimme, että Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I –kurssin aikana käydyt tehtävät vektorien virittämistä vektori- ja aliavaruuksista (H4) ei vaikuttanut opiskelijoiden vastauksiin (a)-kohdassa. Tämä on hieman yllättävää, sillä juuri H4-tyyppiset tehtävät käsittelivät vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruuksia ja vektoreita. Koetehtävän (a)-kohdan tyyppinen tehtävä käsiteltiin myös luennolla ja useissa harjoitustehtävissä. Lisäksi vektoriavaruuksien kohtisuoria komplementteja käsitelleissä tehtävissä (H9) oli esillä kaikki vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruudet, mutta näidenkään tehtävien tekeminen ei vaikuttanut (a)-kohdasta suoriutumiseen.

Vaikuttaisi siltä, että kurssin aikana ennen määritelmää esitetet aliavaruudet eivät liittyneet opiskelijoilla yhteen aliavaruuden määritelmän kanssa. Tämän yhteyden luominen olisi voinut helpottaa myös määritelmän ymmärtämistä konkreettisissa tilanteissa ja koko aliavaruuden käsitteen eheyttämistä. Kurssin kehittämiseksi ehdotuksemme on, että sen aikana voitaisiin keskittyä vielä enemmän aihekokonaisuuksien eheyttämiseen esimerkiksi käsitekartoilla. Tälla tavoin olisi mahdollisuus saada opiskelijoille ehempiä kokonaisuuksia kurssillä käsitellyistä asioista ja niiden linkeistä. Käsitekarttojen rantautuminen matematiikan opetukseen on ollut viime vuosina vielä hidasta mutta enenevää. Tälläkin kurssilla yhtenä kurssitehtävän oli käsitekartan laatiminen lineaarikuvaukseen liittyvistä käsitteistä. Toivoisimme vielä lisää tämäntyyppisiä tehtäviä kurssitehtäviksi.

5.5 Tulokset suhteessa edellisiin tutkimuksiin

Tutkimuksen tulokset ovat melko hyvin linjassa edellisissä tutkimuksissä löydettyjen lineaarialgebran oppimisvaikeuksien kanssa. Opiskelijoille aiheuttaa ongelmia vektoriavaruuteen liittyvien monien prosessien ja käsitteiden, kuten lineaarikombinaatio, lineaarisen riippumattomuus/riippuvuus sekä vektoriavaruuden virittäminen, yhtäaikainen käyttö [7]. Tässäkin tutkimuksessa havaittiin, että näiden prosessien ja käsitteiden vähäinen käsittely lisäsi ongelmia aliavaruuteen liittyvän tehtävän teossa. Parraguez ja Oktaç havaitsivat tutkimuksessaan [8] opiskelijan esitietojen vajavuuden vaikuttavan vahvasti heidän mahdollisuuksiinsa muodostaa skeema vektoriavaruudesta ja sen käsitteistä. Tämä lineaarialgebran oppimisen vaikeus näkyy selvästi myös tutkimuksessamme, esimerkiksi dimension käsitteen ymmärtäneet olivat tehneet selvästi enemmän tehtäviä lähes kaikissa tehtävätyypeissä verrattuna kyseistä käsitettä käsitelleessä tehtävässä virheitä tehneisiin.

Klapsinou ja Gray ([4]) analysoivat tutkimuksessaan kahdella eri tavalla, teoriapainottaisesti ja esimerkkipainotteisesti, järjestettyä yliopistotasoista lineaarialgebran kurssia. Teoriapainotteisella kurssilla opiskelleet ymmärsivät paremmin, miten aiheet kurssilla liittyivät toisiinsa ja mihin ne perustuivat, mutta heidän soveltamiskykynsä esimerkkitehtävissä ja muissa erikoistapauksissa eivät olleet niin hyviä. Koetulokset olivat soveltavan matematiikan opiskelijoilla paremmat, mutta haastattelussa teoriapainotteisella kurssilla opiskelleet perustelivat omia vastauksiaan kysymyksiin paremmin. Tässä tutkimuksessa ei otettu huomioon kurssin opetustyyliä, joten Klapsinoun ja Grayn tutkimuksen tulokset eivät sinänsä ole suoraan verrattavissa tämän tutkimuksen tuloksiin. Vaikka Helsingin Yliopiston kurssi oli melko esimerkkipainoitteinen, niin se sisälsi jonkin verran teoreettisia tehtäviä. Koetehtävässä opiskelijat pärjäsivät melko hyvin (b)-kohdan todistuksessa, joten tehtävässä on nähtävissä samanlaista efektiä kuin Klapsinou ja Gray tutkimuksessa. Sillä on selvästi väliä, miten kurssin sisältöjä opetetaan, ja erilaisessa opetustavalla oltaisiin kenties saatu koetehtävän (a)-kohtaan enemmän oikeita vastauksia.

6 Yhteenveto

Tässä tutkimuksessa tutkimme Helsingin Yliopiston kurssien Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I ja II opiskelijoiden kurssin aikana tekemien tehtävien vaikutusta aliavaruuteen liittyvään kurssikoetehtävän suoritukseen. Jaoimme kurssin aikana tehdyt aliavaruuteen liittyvät tehtävätyypit yhdeksäään erilaiseen luokkaan ja opiskelijoiden kurssikokeessa tekemät tyyppivirheet yhteentoista erilaiseen tyyppivirheluokkaan. Lisäksi jaoimme opiskelijat koetehtävän pistemäärän mukaan kolmeen eri luokkaan, huonosti, keskiverrosti ja hyvin tehtävästä suoriutuneisiin opiskelijoihin. Näiden tietojen avulla analysoimme tutkimuskysymyksiämme, jotka olivat:

- Onko kurssin aikana tehtyjen harjoitustehtävien perusteella mahdollista arvioida, osaako opiskelija tehdä aliavaruuden kurssikoetehtävän?
- Mitkä ovat tyypillisiä virheitä, joita opiskelijat tekevät aliavaruuden käsitteen kurssikoetehtävässä ja voidaanko näiden virheiden muodostuminen jäljittää joihinkin kurssin aikana tehtyihin tehtäviin?

Ensimmäisen tutkimuskysymyksen analysoinnissa saimme kurssin aikana tehtyjen tehtävien ja koetehtävämenestyksen väliseksi Spearmanin korrelaatiokertoimeksi 0,424, jolloin tehdyt tehtävät selittävät 18,0% koetehtävän suoriutumisesta. Tämä oli erittäin hyvä selitysprosentti, ja tukee kurssin ideaa tehtäviä tekemällä oppimisesta.

Kun tutkimme keskiverrosti ja hyvin koetehtävässä menestyneiden ryhmien kurssin aikana tehtyjen tehtävien keskiarvojen samuutta, niin huomasimme tehtävien teon määrässä eroa lineaarikombinaatioon, virittämiseen, lineaariseen riippuvuuteen, vektoriavaruuden dimensioon ja aliavaruuden määritelmään liittyvissä tehtävissä. Toisen tutkimuskysymyksen analysoinnissa havaitsimme joitakin mielenkiintoisia yhteyksiä tehtyjen tehtävien ja erilaisten tyyppivirheiden välillä, esimerkiksi dimensiota enemmän opiskelleet osasivat merkittävästi paremmin nimetä vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruudet.

Kurssin kehitysehdotukseksi tutkimusryhmämme ehdotti käsitekarttojen tekemisen sisällyttämistä kurssin tehtäviin. Tämä olisi mielestämme tapa, jolla opiskelijoille voitaisiin saada vielä parempi käsitys itselleen esimerkiksi aliavaruuksista ja siihen liittyvistä käsitteistä.

Viitteet

[1] Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., Thomas, K., (1996), *A Framework for Research and Curriculum: Development in Undergraduate Mathematics Education*, Teoksessa Kaput, J., Schoenfeld, A. H., Dubinsky, E. (toim.), (1996), Issues in Mathematics Education, Volume 6, Research in Collegiate Mathematics Education II, Conference Board of the Mathematical Sciences, Yhdysvallat.

[2] Contrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., Vidakovic, D., (1995), *Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Schema*, Journal of Mathematical Behavior, 15, 167-192 (1996).

[3] Dorier J.-L., (2000), *On the Teaching of Linear Algebra*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[4] Klapsinou, A., Gray, E., (1999), *The Intricate Balance Between Abstract and Concrete in Linear Algebra*, Mathematics Education Research Centre, University of Warwick, Iso-Britannia.

[5] Harel, G., Tall, D., (1989), *The General, the Abstract, and the Generic in Advanced Mathematics*, For the Learning of Mathematics, 11 1, 38-42, Lontoo

[6] Hautala, T., Romu, T., Rämö, J. and Vikberg, T., (2012), *Extreme Apprenticeship Method in Teaching University-level Mathematics*, Department of Mathematics and Statistics, University of Helsinki.

[7] Macaracci M., *Combining different theoretical perspectives for analyzing students' difficulties in vector spaces theory*, ZDM, May 2008,Volume 40,Issue 2, s. 265-267

[8] Parraguez M., Oktaç A.*Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory*, Linear Algebra and its Applications, Volume 423, Issue 8, s. 2112-2124, 2010

[9] Piaget, J., (1972), *The Principles of Genetic Epistemology*, Routledge & Kegan Paul, Lontoo

[10] https://wiki.helsinki.fi/display/matdid/Lineaarialgebran+oppimisen+vaikeudet

Liitteet

Correlations

			yht:	Total
Spearman's rho	yht:	Correlation Coefficient	1.000	.424**
		Sig. (2-tailed)	.	.000
		N	212	212
	Total	Correlation Coefficient	.424**	1.000
		Sig. (2-tailed)	.000	.
		N	212	212

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Kuva 3: Spearmanin korrelaatiotestin tulokset

Descriptives

Total

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean Lower Bound	95% Confidence Interval for Mean Upper Bound	Minimum	Maximum
0	56	39.04	19.423	2.596	33.83	44.24	0	77
1	68	51.51	21.350	2.589	46.35	56.68	0	77
2	88	61.07	15.413	1.643	57.80	64.33	5	83
Total	212	52.18	20.493	1.407	49.41	54.96	0	83

ANOVA

Total

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	16657.321	2	8328.660	24.191	.000
Within Groups	71956.505	209	344.289		
Total	88613.825	211			

Multiple Comparisons

Dependent Variable: Total

Tamhane

(I) Tasot	(J) Tasot	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
0	1	-12.479*	3.666	.003	-21.36	-3.60
	2	-22.032*	3.072	.000	-29.49	-14.57
1	0	12.479*	3.666	.003	3.60	21.36
	2	-9.553*	3.066	.007	-16.98	-2.13
2	0	22.032*	3.072	.000	14.57	29.49
	1	9.553*	3.066	.007	2.13	16.98

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Kuva 4: Tamhanen T2 testin tulokset 7-11 ja 12-14 pistettä saaneiden keskiarvojen eroista tehtyjen tehtävien määrässä.

Multiple Comparisons

Tamhane

Dependent Variable			Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval Lower Bound	Upper Bound
H2	pisteet 0-6	pisteet 7-11	-1.550	.772	.134	-3.42	.32
		pisteet 12-14	-3.104*	.680	.000	-4.76	-1.45
	pisteet 7-11	pisteet 0-6	1.550	.772	.134	-.32	3.42
		pisteet 12-14	-1.553*	.598	.031	-3.00	-.11
	pisteet 12-14	pisteet 0-6	3.104*	.680	.000	1.45	4.76
		pisteet 7-11	1.553*	.598	.031	.11	3.00
H3	pisteet 0-6	pisteet 7-11	-2.705*	.766	.002	-4.56	-.85
		pisteet 12-14	-4.479*	.657	.000	-6.07	-2.89
	pisteet 7-11	pisteet 0-6	2.705*	.766	.002	.85	4.56
		pisteet 12-14	-1.774*	.648	.021	-3.34	-.21
	pisteet 12-14	pisteet 0-6	4.479*	.657	.000	2.89	6.07
		pisteet 7-11	1.774*	.648	.021	.21	3.34
H5	pisteet 0-6	pisteet 7-11	-1.789*	.596	.010	-3.23	-.34
		pisteet 12-14	-3.110*	.519	.000	-4.37	-1.85
	pisteet 7-11	pisteet 0-6	1.789*	.596	.010	.34	3.23
		pisteet 12-14	-1.322*	.498	.027	-2.53	-.12
	pisteet 12-14	pisteet 0-6	3.110*	.519	.000	1.85	4.37
		pisteet 7-11	1.322*	.498	.027	.12	2.53
H7	pisteet 0-6	pisteet 7-11	-1.076*	.258	.000	-1.70	-.45
		pisteet 12-14	-1.940*	.214	.000	-2.46	-1.42
	pisteet 7-11	pisteet 0-6	1.076*	.258	.000	.45	1.70
		pisteet 12-14	-.864*	.219	.000	-1.39	-.33
	pisteet 12-14	pisteet 0-6	1.940*	.214	.000	1.42	2.46
		pisteet 7-11	.864*	.219	.000	.33	1.39
H8	pisteet 0-6	pisteet 7-11	-2.835*	.821	.002	-4.82	-.85
		pisteet 12-14	-5.130*	.701	.000	-6.83	-3.43
	pisteet 7-11	pisteet 0-6	2.835*	.821	.002	.85	4.82
		pisteet 12-14	-2.295*	.700	.004	-3.99	-.60
	pisteet 12-14	pisteet 0-6	5.130*	.701	.000	3.43	6.83
		pisteet 7-11	2.295*	.700	.004	.60	3.99

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Kuva 5: Tamhanen T2 testin tulokset, joissa löytyi tilastollisesti merkittävä ero 7-11 ja 12-14 pistettä saaneiden välillä.

Multiple Comparisons

Tamhane

Dependent Variable			Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval Lower Bound	Upper Bound
H1	pisteet 0-6	pisteet 7-11	-.682	.475	.395	-1.83	.47
		pisteet 12-14	-1.492*	.423	.002	-2.52	-.46
	pisteet 7-11	pisteet 0-6	.682	.475	.395	-.47	1.83
		pisteet 12-14	-.810	.372	.091	-1.71	.09
	pisteet 12-14	pisteet 0-6	1.492*	.423	.002	.46	2.52
		pisteet 7-11	.810	.372	.091	-.09	1.71
H4	pisteet 0-6	pisteet 7-11	-1.540*	.593	.031	-2.98	-.10
		pisteet 12-14	-2.541*	.512	.000	-3.79	-1.30
	pisteet 7-11	pisteet 0-6	1.540*	.593	.031	.10	2.98
		pisteet 12-14	-1.001	.485	.118	-2.17	.17
	pisteet 12-14	pisteet 0-6	2.541*	.512	.000	1.30	3.79
		pisteet 7-11	1.001	.485	.118	-.17	2.17
H6	pisteet 0-6	pisteet 7-11	-1.444*	.559	.032	-2.80	-.09
		pisteet 12-14	-2.620*	.470	.000	-3.76	-1.48
	pisteet 7-11	pisteet 0-6	1.444*	.559	.032	.09	2.80
		pisteet 12-14	-1.176	.506	.064	-2.40	.05
	pisteet 12-14	pisteet 0-6	2.620*	.470	.000	1.48	3.76
		pisteet 7-11	1.176	.506	.064	-.05	2.40
H9	pisteet 0-6	pisteet 7-11	-2.155*	.503	.000	-3.37	-.94
		pisteet 12-14	-2.612*	.472	.000	-3.75	-1.47
	pisteet 7-11	pisteet 0-6	2.155*	.503	.000	.94	3.37
		pisteet 12-14	-.457	.479	.716	-1.61	.70
	pisteet 12-14	pisteet 0-6	2.612*	.472	.000	1.47	3.75
		pisteet 7-11	.457	.479	.716	-.70	1.61

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Kuva 6: Tamhanen T2 testin tulokset, joissa ei löytynyt tilastollisesti merkittävää ero 7-11 ja 12-14 pistettä saaneiden välillä.

Tamhane

Dependent Variable	(I) A-tyyppivirhe yhdistettynä	(J) A-tyyppivirhe yhdistettynä	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.
H7	A1	A2	.510	.255	.252
		A3	-.176	.312	.994
		Ei virhettä	-.469	.321	.623
	A2	A1	-.510	.255	.252
		A3	-.686	.288	.113
		Ei virhettä	-.979*	.298	.013
	A3	A1	.176	.312	.994
		A2	.686	.288	.113
		Ei virhettä	-.293	.348	.955
	Ei virhettä	A1	.469	.321	.623
		A2	.979*	.298	.013
		A3	.293	.348	.955
H8	A1	A2	2.167*	.760	.030
		A3	-.601	.899	.985
		Ei virhettä	-.567	1.100	.996
	A2	A1	-2.167*	.760	.030
		A3	-2.769*	.860	.011
		Ei virhettä	-2.735	1.069	.087
	A3	A1	.601	.899	.985
		A2	2.769*	.860	.011
		Ei virhettä	.034	1.171	1.000
	Ei virhettä	A1	.567	1.100	.996
		A2	2.735	1.069	.087
		A3	-.034	1.171	1.000

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Kuva 7: Varianssianalyysi (a)-kohdan tyyppivirheiden neljän ryhmän välillä tehtäväntyypin H7 ja H8 mukaan.

Test of Homogeneity of Variances

	Levene Statistic	df1	df2	Sig.
H3	.001	1	210	.979
H5	.059	1	210	.808
H6	.018	1	210	.893
H7	.979	1	210	.324
H8	.298	1	210	.586

ANOVA

		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
H3	Between Groups	84.099	1	84.099	4.594	.033
	Within Groups	3843.976	210	18.305		
	Total	3928.075	211			
H5	Between Groups	82.749	1	82.749	5.498	.020
	Within Groups	3160.472	210	15.050		
	Total	3243.222	211			
H6	Between Groups	46.713	1	46.713	4.315	.039
	Within Groups	2273.306	210	10.825		
	Total	2320.019	211			
H7	Between Groups	19.055	1	19.055	8.523	.004
	Within Groups	469.525	210	2.236		
	Total	488.580	211			
H8	Between Groups	100.136	1	100.136	6.766	.010
	Within Groups	3108.034	210	14.800		
	Total	3208.170	211			

Kuva 8: Varianssianalyysi tyyppivirheen B3 kahden ryhmän välillä tehtävän-tyypin H3 ja H5-H8 mukaan.

Multiple Comparisons

Tamhane

Dependent Variable			Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.
H3	C1	C2	-2.869	1.163	.107
		C3	-3.345	1.256	.072
		Ei virhettä	-5.684*	.760	.000
	C2	C1	2.869	1.163	.107
		C3	-.476	1.406	1.000
		Ei virhettä	-2.815*	.989	.050
	C3	C1	3.345	1.256	.072
		C2	.476	1.406	1.000
		Ei virhettä	-2.339	1.097	.240
	Ei virhettä	C1	5.684*	.760	.000
		C2	2.815*	.989	.050
		C3	2.339	1.097	.240
H7	C1	C2	-.682	.344	.291
		C3	-1.184*	.410	.045
		Ei virhettä	-2.113*	.214	.000
	C2	C1	.682	.344	.291
		C3	-.502	.469	.873
		Ei virhettä	-1.431*	.312	.001
	C3	C1	1.184*	.410	.045
		C2	.502	.469	.873
		Ei virhettä	-.929	.384	.138
	Ei virhettä	C1	2.113*	.214	.000
		C2	1.431*	.312	.001
		C3	.929	.384	.138
H9	C1	C2	-1.682	.744	.169
		C3	-2.632*	.781	.013
		Ei virhettä	-3.626*	.464	.000
	C2	C1	1.682	.744	.169
		C3	-.950	.920	.891
		Ei virhettä	-1.944*	.673	.044
	C3	C1	2.632*	.781	.013
		C2	.950	.920	.891
		Ei virhettä	-.994	.713	.689
	Ei virhettä	C1	3.626*	.464	.000
		C2	1.944*	.673	.044
		C3	.994	.713	.689

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Kuva 9: Tamhanen T2 testin tulokset (c)-kohdan tyyppivirheiden välillä tehtävätyypeissä H3, H7 ja H9.