HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

”Eli onks täs nyt tarkotus keksii eri tapoja?”

Tapaustutkimus luokkahuonekeskusteluista matematiikan ongelmanratkaisutunneilla

Helsingin yliopisto
Käyttäytymistieteellinen tiedekunta
Opettajankoulutuslaitos
Luokanopettajan koulutus
Pro gradu -tutkielma
Kasvatustiede
Lokakuu 2012
Anu Kankaanpää

Ohjaaja: Anu Laine

HELSINGIN YLIOPISTO

Tiedekunta - Fakultet - Faculty	Laitos - Institution - Department	
Käyttäytymistieteellinen	Opettajankoulutuslaitos	
Tekijä - Författare - Author Anu Kankaanpää		
Työn nimi - Arbetets titel Eli onks täs nyt tarkotus keksii eri tapoja? Tapaustutkimus luokkahuonekeskusteluista matematiikan ongelmanratkaisutunneilla.		
Oppiaine - Läroämne - Subject Kasvatustiede		
Työn laji/ Ohjaaja - Arbetets art/Handledare - Level/Instructor Pro gradu -tutkielma / Anu Laine	Aika - Datum - Month and year Lokakuu 2012	Sivumäärä - Sidoantal - Number of pages 78 s.

Tiivistelmä - Referat - Abstract

Ongelmanratkaisu on prosessi, joka sisältää ongelmaan orientoitumisen, ongelman työstämisen, ongelman ratkaisemisen sekä ratkaisun tulkinnan. Aiemmat tutkimukset ovat esittäneet, että kohdatessaan matemaattista ongelmanratkaisua vaativia tehtäviä oppilaat käyvät läpi ongelman rajaamisen, ratkaisun etsimisen, oletusten tekemisen sekä oletusten tutkimisen ja oikeaksi osoittamisen vaiheet. Ratkaisuprosessi on dynaaminen: vaiheisiin voi palata uudelleen ja jotkin vaiheet saattavat jäädä kokonaan pois. Opettaja auttaa oppilaita ratkaisuprosessin eri vaiheissa ja ohjaa siirtymään vaiheesta toiseen. Tämän tutkielman tavoitteena oli kuvata, miten luokanopettajat opettavat matemaattista ongelmanratkaisua ja ohjaavat oppilaiden ratkaisuprosesseja. Tarkastelun kohteeksi valittiin opettajan ja oppilaiden välinen luokkahuonekeskustelu matematiikan ongelmanratkaisutuntien aikana. Ongelmanratkaisun opettamista lähestyttiin erityisesti opettajan puheen kautta. Tutkimuksen tehtävänä on selvittää, miten luokanopettajat opettavat ongelmanratkaisua ja millaista oppituntien luokkahuonekeskustelu on.

Tutkimuksen aineistona käytettiin videolle tallennettuja kolmannen luokan matematiikan ongelmanratkaisutunteja. Ongelmanratkaisutunnit ovat osa tutkimusprojektia, jossa ongelmatehtävien ratkaisemista harjoitellaan säännöllisesti. Jokainen kahdeksasta luokanopettajasta käsitteli oppitunnillaan samaa avointa ongelmatehtävää. Videolta litteroitua luokkahuonekeskustelua analysoitiin aineistolähtöisesti sisällönanalyysin avulla.

Opettaja kohdisti ohjaustaan koko luokan lisäksi yksittäisille oppilaille ja pareille. Opettajien ohjaus kohdistui usein ongelmatehtävän ymmärtämiseen ja oppilaiden ratkaisuehdotusten merkitsemiseen. Ohjausta liittyi myös ongelmanratkaisustrategioiden käyttöön ja valmiin ratkaisun tarkasteluun. Opettajat ohjasivat oppilaita etenemään ratkaisuprosessissa seuraavaan vaiheeseen tai palaamaan takaisin edellisiin. Opettajien tekemien kysymysten määrä ja sisältö vaihtelivat selvästi. Oppitunnit poikkesivat toisistaan myös oppilaiden esittämien kysymysten perusteella. Analyysin pohjalta muodostettiin luokitukset sekä opettajien että oppilaiden esittämistä kysymyksistä.

Avainsanat - Nyckelord
matemaattinen ongelmanratkaisu, opetus, luokkahuoneen vuorovaikutus

Säilytyspaikka - Förvaringsställe - Where deposited
Helsingin yliopiston kirjasto, keskustakampuksen kirjasto, käyttäytymistieteet / Minerva

Muita tietoja - Övriga uppgifter - Additional information

UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta - Fakultet - Faculty Behavioural Sciences		Laitos - Institution - Department Teacher Education
Tekijä - Författare - Author Anu Kankaanpää		
Title Do I have to think of different solutions? A case study on classroom conversation at mathematical problem solving lessons.		
Oppiaine - Läroämne - Subject Education		
Työn laji/ Ohjaaja - Arbetets art/Handledare - Level/Instructor Master's Thesis / Anu Laine	Aika - Datum - Month and year October 2012	Sivumäärä - Sidoantal - Number of pages 78 pp.

Tiivistelmä - Referat - Abstract

Mathematical problem solving is a process, which includes understanding the problem, solving the problem and looking back at the completed solution. According to open problem solving model a pupil cycles through following phases: framing the problem, exploring solution, conjecturing and justifying or investigating the conjecture. The solver may return to a previous phase. It is also possible that the solver does not go through all of the phases. A teacher has an important role in a classroom. The teacher guides pupils during a certain phase and also guides solvers to change a phase. The purpose of this thesis is to describe how teachers teach problem solving and how they guide pupils´ problem solving processes. The analysis was based on classroom interaction between the teacher and pupils and especially on teachers´ talk. The intention is to find out how teachers teach mathematical problem solving as well as to describe classroom conversation during problem solving lessons.

The material consists of videotaped third grade mathematical problem solving lessons. The problem solving lessons are a part of the research project, which includes several similar problem solving lessons. Each of the eight teachers presented the same open problem during their lesson. The transcribed classroom conversation was analysed by content analysis.

The teachers guided a single pupil or pair of pupils in addition to guiding the whole class. The teachers usually helped pupils to understand the problem and to write their solutions. They also brought out problem solving strategies and helped pupils to look back at the completed solution. The teachers guided their pupils to move into the next phase of their solving process. They also guided pupils to return to the previous phase. The teachers´ guidance and the conversation during each lesson were different. There are classifications of both teachers´ and pupils´ questions based on the analysis of classroom conversation.

Keywords
mathematical problem solving, teaching, classroom interaction

Säilytyspaikka - Förvaringsställe - Where deposited
City Centre Campus Library/Behavioural Sciences/Minerva

Muita tietoja - Övriga uppgifter - Additional information

Sisällys

TAULUKOT

KUVIOT

1 Johdanto

Jo ennen kouluikää lapset ratkovat ongelmia yrityksen ja erehdyksen kautta. Opetuksen avulla voidaan harjoitella rationaalisempia tapoja ratkaista lapsen kohtaamia kysymyksiä. (Aho 1989, 27.) Ongelman ratkaiseminen on prosessi, johon sisältyvät ongelman hahmottaminen, ongelman työstäminen, ongelman ratkaiseminen sekä ratkaisun tulkitseminen (Haapasalo 1998, 17). Ongelmanratkaisuprosessia ja sen vaiheita on harjoiteltava, jotta oppilaasta tulisi sujuva ongelmien ratkoja niin koulussa kuin sen ulkopuolellakin. Ongelmien kohtaaminen ja ratkominen tulevat peruskoulussa esille erityisesti matematiikan opetuksessa (ks. POPS 2004, 158).

Pidän ongelmanratkaisun opettamista eräänä matematiikan opetuksen keskeisimmistä haasteista. Matematiikan kirjasta löytyvät ongelmanratkaisutehtävät eivät kuitenkaan takaa sitä, että oppilaat oppisivat ratkomaan ongelmia. PISA-tutkimuksen tulokset paljastavat, että suomalaiset peruskoululaiset hallitsevat hyvin käytännön elämään liittyvää matematiikkaa. Opintojen edetessä abstraktimmalle tasolle matemaattiset tehtävät edellyttävät enemmän ongelmanratkaisua ja oppiaineen kontekstiin liittyvää tietoa myös tehtävänannon ulkopuolelta. Näitä tehtäviä varten on omaksuttava ongelmanratkaisuprosessi ja opittava soveltamaan itsenäisesti aihepiiriin liittyvää tietoa. Vuosiluokkien edetessä tehtävät muuttuvat yhä vaikeammiksi, mutta ratkaisu- ja sovellustaidot eivät näytä kehittyvän yhtä nopeasti. (Leppäaho 2007a, 18.)

Vaatimus ongelmanratkaisutaidon opettamisesta löytyy jo perusopetuksen opetussuunnitelman perusteista matematiikan opetusta käsittelevästä luvusta: ”Opetuksen tulee kehittää oppilaan luovaa ja täsmällistä ajattelua, ja sen tulee ohjata oppilasta löytämään ja muokkaamaan ongelmia sekä etsimään ratkaisuja niihin” (POPS 2004, 158). Luokkatason 9 arviointikriteereissä arvosanalle 8 asetetaan vaatimus: ”Oppilas osaa muuntaa yksinkertaisen tekstimuodossa olevan ongelman matemaattiseen esitysmuotoon ja tehdä suunnitelman ongelman ratkaisemiseksi, ratkaista sen ja tarkistaa tuloksen oikeellisuuden” (mts. 165). Ei riitä, että matematiikan opetuksen yhteydessä oppilas oppii ratkaisemaan nopeasti hänelle valmiina esitetyt tehtävät, vaan hänen täytyy päästä myös itse etsimään ja muokkaamaan ongelmatilanteita sekä arvioimaan saamaansa vastausta. Pehkonen (1991) jakaa ongelmanratkaisun opettamista tukevat perustelut neljään ryhmään: ongelmanratkaisu kehittää yleisiä kognitiivisia valmiuksia, ongelmanratkaisu edistää luovuuden kehittymistä, on osa matemaattista soveltamisprosessia sekä motivoi oppilaat matematiikan opiskeluun.

Tutkijat ovat määritelleet esimerkiksi ongelmatehtävien tyyppejä, ongelmanratkaisuprosessin vaiheita ja erilaisista ratkaisustrategioita (esim. Vaulamo & Pehkonen 1999; Pólya 1945; Schoenfeld 1985). Koulussa merkittävin oppilaan ongelmanratkaisuprosessiin vaikuttava ulkopuolinen tekijä on kuitenkin opettaja (Vaulamo & Pehkonen 1999, 20). Hän valitsee käsiteltävät tehtävät, suunnittelee opetuksen ja ohjailee oppilaan työskentelyä. Lisäksi opettaja näyttäisi hallitsevan oppituntien keskustelua ja käyttävän suurimman osan kielelliseen vuorovaikutukseen kuuluvasta ajasta. (Leiwo, Kuusinen, Nykänen & Pöyhönen 1987a, 1987b).

Kommunikoinnilla on keskeinen asema, kun oppilas muodostaa matemaattisia käsitteitä (Ahtee ym. 2005, 95). Koulun oppimistilanteissa vuorovaikutus voi olla opettajan ja oppilaiden välistä tai oppilaiden keskinäistä kommunikaatiota. Vuorovaikutuksen muodostumiseen vaikuttavat oppimistilanteen ilmapiiri, ympäristö sekä osapuolten aikaisemmat kokemukset. (Repo-Kaarento & Levander 2002, 141–142.) Jos opettaja haluaa ymmärtää oppilaita ja auttaa heitä ymmärtämään opetettava asia, on hänen kuunneltava oppilaitaan ja seurattava heidän ajatteluprosessejaan (Ahtee ym. 2005, 95). Ongelmanratkaisu tapahtuu matematiikan tuntien vuorovaikutustilanteessa: ongelmanratkaisusta puhutaan, sitä opetetaan ja opitaan. Erityisesti matematiikan didaktiikan opinnoissa minua on rohkaistu kuuntelemaan oppilaita ja kysymään, mitä he ajattelevat laskiessaan. Koska matemaattisen ongelmien ratkaisemisen harjoittelu on matemaattisen ajattelun ja ongelmien kanssa työskentelyn harjoittelua, on mielenkiintoista kiinnittää huomiota opettajien tapaan rohkaista oppilaita kertomaan ajattelustaan ongelmien ratkomisen lomassa.

Opetuksen kehittämisen edellytyksenä on, että tiedetään, mitä luokissa tapahtuu. Opettajan ja oppilaiden välistä vuorovaikutusta onkin tutkittu erilaisista näkökulmista myös Suomessa (esim. Heinilä 2002, Keravuori 1988, Leiwo ym. 1987). Pro gradu tutkielmissa on analysoitu esimerkiksi liikuntatuntien vuorovaikutusrakenteita (Lyyski 2011), luokanopettajaopiskelijoiden esittämiä kysymyksiä matematiikan tunneilla (Harri 2010) sekä luokkahuoneen vuorovaikutusta draamatunneilla (Maunu 2011). Viime vuosina ei ole kuitenkaan tehty kattavaa suomalaista tutkimusta luokkahuoneiden vuorovaikutuksesta yleisesti.

Tarkastelin kandidaatin tutkielmassani (Kankaanpää 2012) viiden luokanopettajan käsityksiä siitä, miten he opettavat matemaattista ongelmanratkaisua. Tutkielmassa haastateltujen opettajien käsitykset poikkesivat ongelmanratkaisuprosessin teoreettisista malleista erityisesti siten, että prosessin alku, ongelman ymmärtäminen, korostuu, mutta muut prosessin vaiheet jäävät vähemmälle huomiolle. Osa opettajista esitti ongelmanratkaisutehtävien olevat lähinnä lisämateriaalia taitavimmille laskijoille. Tutkielman teko herätti kysymyksiä siitä, millaista ongelmanratkaisun opettaminen on käytännössä, sillä tutkielmani aineiston muodostivat opettajien käsitykset, eivät havainnot oppitunneilta.

Tämän tutkielman tavoitteena on kuvailla, miten luokanopettajat opettavat ongelmanratkaisua matematiikan oppitunneilla. Videoituja oppitunteja analysoimalla pyrin muodostamaan kuvan siitä, millaista opettajan ja oppilaiden välinen keskustelu on ongelmanratkaisutuokioiden aikana. Kiinnitän huomioni erityisesti siihen, miten opettaja ohjaa oppilaita tuntien aikana ja millaisilla kysymyksillä oppilaat hakevat opettajan ohjausta. Lisäksi pyrin selvittämään, mitkä ongelmanratkaisuprosessin vaiheet ja ongelmanratkaisustrategiat korostuvat opetuksessa oppitunneilla käydyn keskustelun perusteella.

2 Ongelmanratkaisu osana matematiikan opetusta

”Matematiikan opetuksen tehtävänä on tarjota mahdollisuuksia matemaattisen ajattelun kehittämiseen ja matemaattisten käsitteiden sekä yleisimmin käytettyjen ratkaisumenetelmien oppimiseen” (POPS 2004, 158). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet ei määrittele tarkemmin matemaattista ajattelua. Tehtävään sisältyy kuitenkin selkeä vaatimus siitä, että peruskoulun matematiikan opetuksen tulee keskittyä ajattelutaitoihin ja erilaisiin ongelmien ratkaisemisessa käytettyihin menetelmiin. Useat tutkijat ovatkin nostaneet ongelmanratkaisun matemaattisen ajattelun ja sen kehittämisen ytimeksi (esim. Mason, Burton & Stacey 1982; Schoenfeld 1985). Ongelmanratkaisun asemaa matematiikan opetuksessa voidaan perustella pyrkimyksellä kehittää matemaattisen ajattelun taitoja. Ajattelutaitoihin kuuluvat sekä looginen että luova ajattelu (Vaulamo & Pehkonen 1999, 16).

Matemaattista ajattelua ei ole voitu määritellä yksiselitteisesti. Käsite on laaja ja eri tutkijoiden muodostamat määritelmät poikkeavat toisistaan. Matemaattiseen ajatteluun liitetään kuitenkin usein käsitteet matemaattinen tieto, taito ja kyky. (Leppäaho 2007a, 29–30.) Nämä matemaattisen ajattelun ulottuvuudet on koottu kuvioon 1. Matemaattinen *tieto* voidaan jakaa konseptuaaliseen eli käsitteelliseen tietoon ja proseduraaliseen eli menetelmätietoon. Haapasalo (1998) esittää, että konseptuaalinen tieto muodostuu yksilön tietoverkosta, jonka käyttö ja rakentaminen on tietoista. Proseduraalinen tieto on tietoa siitä, kuinka eri sääntöjä, menetelmiä tai algoritmeja käytetään suorituksen aikana. Jos suoritus on jo automatisoitunut, proseduraalinen tieto ei välttämättä edellytä tietoista ajattelua. (Haapasalo 1998, 51–53; Leppäaho 2007a, 30–31.) Leppäaho (2007a) määrittelee *kyvyt* yksilön synnynnäisiksi valmiuksiksi ja *taidot* opituiksi ominaisuuksiksi. Yksilö voi kehittää näitä molempia harjoittelun avulla ja lisätä näin taitavuuttaan jollakin tietyllä alueella. (Leppäaho 2007a, 31.)

Matemaattinen ajattelu		
Tieto: konseptuaalinen ja proseduraalinen	**Taito**	**Kyvyt**

Kuvio 1 Matemaattinen ajattelu (Haapasalo 1998, 51–53; Leppäaho 2007a, 39–31.)

Jako voidaan tehdä myös algoritmisen ja reflektoivan ajattelun välille. *Algoritmista ajattelua* voidaan kutsua taitotiedoksi. Se näkyy kognitiivisen taidon käyttämisenä, kun verbaalista lausetta täsmennetään symbolikieleksi tai päinvastoin. Tietyn periaatteen käyttäminen merkitsee taitoa toimia tietyllä tavalla. Taito sisältää myös oikean operaation valinnan ja sen vaikutuksen tuntemisen. Algoritminen ajattelu tuottaa välineitä tehtävien ratkaisemiseen ja tulosten kehittämiseen. *Reflektoiva ajattelu* eli pohdiskeleminen houkuttelee kehittämään oivalluksia deduktiivisten päätelmien tekemiseen. Reflektoivalle toiminnalle asetetut tavoitteet liittyvät siihen, kuinka itsenäisesti sekä omiin kokemuksiinsa ja arviointeihinsa nojautuen yksilö suuntaa toimintaansa. (Yrjönsuuri 1997, 135–136.) Ongelmien ja oman toiminnan reflektoiva pohtiminen on keskeistä matemaattisen ajattelun kehittymisen kannalta (Mason ym. 1982, 3). Yksilön tietoisuutta tiedoistaan ja kognitiivisista prosesseistaan sekä niiden tuloksista ja niihin vaikuttavista tekijöistä kutsutaan metakognitioksi (Yrjönsuuri 1990. 16).

2.1 Ongelma

Kirjallisuudessa ongelman synonyyminä käytetään usein myös sanaa probleema (esim. Pehkonen 1991). Viittaan tässä tutkielmassani selkeyden vuoksi tehtäviin ja prosesseihin sanoilla ongelma ja ongelmanratkaisu. Tehtävistä, joissa ongelmanratkaisua ei tarvita, käytän nimitystä rutiinitehtävä, jonka synonyymejä kirjallisuudessa ovat esimerkiksi harjoitustehtävä ja standarditehtävä (esim. Pehkonen & Zimmermann 1990).

Vaulamo ja Pehkonen (1999) määrittelevät ongelman tilanteeksi, jonka suorittamiseksi yksilö joutuu järjestämään tai rakentamaan aiemmin oppimaansa tietoa uudella tavalla. Jos tilanteen suorittamisessa tarvittavat toimenpiteet voi tunnistaa heti, on kyseessä rutiinitehtävä (Pehkonen & Zimmermann 1990, 11). Leppäaho (2007a, 38–39) määrittelee ongelmaksi tehtävätilanteen, jota yksilö ei kykene välittömästi ratkaisemaan, mutta hänellä on kuitenkin valmiudet ratkaisun saavuttamiseen ajattelun ja opiskelun avulla. Ratkaisun saavuttaminen voi kestää sekunneista viikkoihin tai jopa vuosiin.

Ongelman määritelmä on aina sidoksissa henkilöön ja aikaan. Tehtävä voi olla jollekin ongelma, mutta toinen tunnistaa vaadittavat toimenpiteet heti. Samanlainen tehtävä voi ajan myötä muuttua ongelmasta rutiinitehtäväksi, kun ratkaisumenetelmä tulee tutuksi. (Pehkonen & Zimmermann 1990, 40.) Haapasalo (1998, 17) korostaa määritelmässään ongelmanratkaisun tavoitteellisuutta: Ongelma on tilanne, johon liittyy yksilön kannalta ristiriita- ja epätasapainotila. Tämä saa aikaan päämäärähakuista ajattelutoimintaa, joka tähtää tämän ristiriidan poistamiseen eli ratkaisun löytämiseen.

Ongelmia ja ongelmatehtäviä on luokiteltu useilla erilaisilla tavoilla. Ongelmatehtävät eroavat toisistaan esimerkiksi vaikeustason mukaan. Ongelmaa voidaan pitää sitä vaikeampana, mitä työläämpää ratkaisun löytäminen on. Pulmatehtävät ovat yksinkertaisia ongelmia, joissa tarvitaan yleensä vain yksi oivallus ratkaisuun pääsemiseksi. (Pehkonen & Zimmermann 1990, 40.)

Ongelmatehtävät voidaan luokitella sanallisiin, numeerisiin ja geometrisiin tehtäviin. Matemaattisen sanallisen ongelman ratkaisemiseksi voidaan muodostaa laskulauseke, apupiirros tai molemmat. Numeerisen ongelman ratkaisu edellyttää numeerista päättelyä tai sarjan tai kaavan löytämistä esimerkiksi lukujonosta. Geometrisen ongelmatehtävän ratkaisu vaatii geometristen muotojen havaitsemista ja niihin liittyvien kaavojen soveltamista. (Leppäaho 2007a, 39.) Eräs luokitteluperuste on jakaa ongelmat tiedon esitysmuodon mukaan verbaalisiksi, kuvallisiksi tai symbolisiksi ongelmiksi (Haapasalo 1998, 43).

Ongelmia voidaan luokitella myös avoimiin ja suljettuihin ongelmiin. Avoimessa ongelmassa tehtävän alku- tai lopputilanne tai molemmat on annettu avoimena. Jos molemmat ovat suljettuja eli tehtävänannossa tarkasti määriteltyjä, on kyseessä suljettu ongelma. (Pehkonen & Zimmermann 1990, 41–42.) Matematiikassa kyseisestä jaosta voidaan puhua myös käyttäen käsitteitä huonosti määritelty (ill-defined) ja hyvin määritelty (well-defined) ongelma (Vaulamo & Pehkonen 1999, 14). Ratkaistessaan avoimia ongelmatehtäviä oppilaat voivat tuoda mukaan lisäoletuksia prosessin edetessä. Tällöin voidaan päätyä erilaisiin, mutta yhtä lailla oikeisiin tuloksiin. Avoimiin tehtäviin kuuluvat esimerkiksi arkielämän ongelmat sekä ongelmat ilman kysymystä. (Ahtee, Pehkonen, Krzywacki, Lavonen & Jauhiainen 2005, 95.)

Kuviossa 2 ongelmat luokitellaan neljään luokkaan niiden lähtö- ja lopputilanteen mukaan. Lähtötilanne ja lopputilanne tarkoittavat ongelmanratkaisuprosessin alkua ja loppua. Tehtävä on kaikkein avoimimmillaan, kun sekä alku- että lopputilanne ovat avoimia (both-ends-open problem). Tällöin ratkaisijan on luotava oma tehtävä ja ratkaistava se haluamallaan tavalla. Oppilas voi esimerkiksi laatia ongelmatehtävän luokkakavereille. (Leppäaho 2007a, 39–40.) Tällaisia tehtäviä kuviossa 2 edustavat todellisen elämän tilanteet, ongelmien variointi, projektit sekä ongelman asettaminen. Kun alkutilanne on avoin (open-beginning problem), ratkaisija voi itse päättää, miten ja mistä lähtökohdista hän pääsee määriteltyyn lopputulokseen. Ratkaisija voi esimerkiksi suunnitella kesälomaretken ja selvittää sen kustannukset siten, että ottaa ratkaisussaan huomioon ennalta tiedetyt tosiasiat, kuten polttoaineen kulutus sekä yöpymisen ja ruokailun kustannukset. Ratkaisun lopputilanne voidaan jättää avoimeksi (open-ended problem). Tällöin ei ole olemassa yhtä oikeaa ratkaisua. Vastaus on oikein, kun se täyttää tehtävän alkuehdot. Ongelman lopputilanne on avoin esimerkiksi silloin, kun oppilaiden pitää suunnitella pienoismallilaiva, jonka tilavuus on ennalta määrätty. (Leppäaho 2007a, 39–40.) Suljetussa ongelmatehtävässä sekä alku että lopputilanne on määritelty (Vaulamo & Pehkonen 1999). Avoimella ongelmanratkaisulla tarkoitetaan avoimien ongelmien kanssa työskentelyä tai suljettujen ongelmien kehittelyä edelleen (Pehkonen & Zimmermann 1990, 42). Tutkimustehtävän (investigation) painopiste on luovassa ajattelussa. Luonteeltaan tutkimustehtävät ovat avoimia, mutta niitä voidaan muodostaa suljetuista ongelmista ehtoja muuttamalla. (Vaulamo & Pehkonen 1999, 14–15.) Pääasiallisesti matematiikan opetuksessa käytetyt ongelmatehtävät ovat olleet suljettuja (Pehkonen & Zimmermann 1990, 42).

loppu-tilanne / **lähtö-tilanne**	**SULJETTU (ts. tarkasti selitetty)**	**AVOIN**
SULJETTU (ts. tarkasti selitetty)	**suljetut ongelmat**	**open-ended-ongelmat** **todelliset elämän tilanteet** **tutkimustehtävät** **ongelmien variointi**
AVOIN	**todellisen elämän tilanteet** **ongelmien variointi**	**todellisen elämän tilanteet** **ongelmien variointi** **projektit** **ongelman asettaminen**

Kuvio 2 Ongelmien luokittelu niiden lähtö- ja lopputilanteen mukaan (Vaulamo & Pehkonen 1999, 14)

Haapasalo (1985: 1998, 37–44) täydentää Dörneriltä lainaamaansa luokitusta jakamalla ongelmat interpolaatio-, analyysi-synteesi- ja dialektisiin ongelmiin. *Interpolaatio-ongelmat* edustavat suljettuja ongelmia. Niissä tunnetaan sekä lähtö- että lopputilanne (navat), mutta niiden välinen reitti (inter) puuttuu. Joskus tällaiset ongelmat ovat niin haastavia, että ratkaiseminen täyttää analyysi-synteesi-ongelman tunnusmerkit. Synteesi tarkoittaa eteenpäin työstämistä ja analyysi taaksepäin työstämistä. Nämä vaiheet esiintyvät prosessin aikana usein vuorotellen. *Analyysi-synteesiongelman* alku- ja lopputila ovat usein epämääräisiä tai ainakin toinen niistä saattaa puuttua kokonaan. Ratkaisijan on itse keksittävä ja perusteltava tarvittavat operaatiot sekä rakennettava niistä sopivia ratkaisuaskeleita soveltamalla käytössä olevia tietoja. *Dialektisen ongelman* lopputila on selvästi laajuudeltaan, sisällöltään ja muodoltaan avoin, eikä sitä ole annettu valmiina. Ongelman alkutilakin saattaa joissain tapauksissa olla epämääräinen. Lopputilanne syntyy ratkaisuprosessin aikana ratkaisijan toimesta. Ratkaisija kohtaa ongelmanratkaisuprosessin aikana ristiriitoja ja saattaa joutua muuttamaan toistuvasti päämääräänsä. Tähän prosessiin liittyy vapaus tehdä henkilökohtaisia päätöksiä ja painotuksia. Dialektisen ongelman asettelussa ratkaisijaa pyydetään usein ilmaisemaan mielipide tai oma näkökanta. Tätä ryhmittelyä voi verrata Vaulamon ja Pehkosen luokitukseen (kuvio 2) siten, että avoin ongelma voi olla joko analyysi-synteesi- tai dialektinen ongelma, muttei koskaan interpolaatio-ongelma.

2.2 Ongelmanratkaisuprosessi

Ongelmanratkaisuksi kutsutaan toimenpiteitä ongelman ratkaisemiseksi. Ratkaisija tunnistaa tuttuja ominaisuuksia uudessa tilanteessa ja toimii niihin sopivalla tavalla. (Vaulamo & Pehkonen 1999, 14, 18.) Ongelmanratkaisulla tarkoitetaan aina prosessia. Se sisältää ongelmaan orientoitumisen, ongelman työstämisen, ongelman ratkaisemisen sekä ratkaisun tulkinnan. (Haapasalo 1998, 17.) Yrjönsuuri (1990, 17) määrittelee matemaattisen ongelman ratkaisemisen prosessiksi, jossa ratkaisija etenee lähtötilasta loogisin tai matemaattisin operaatioin tavoitetilaan. Tätä prosessia voidaan pitää luovana, sillä sen kautta yksilö laatii olemassa olevasta uudenlaisen kokonaisuuden (Pehkonen & Zimmermann 1990, 41). Ratkaisijan luovuus korostuu erityisesti ongelman havaitsemis- ja asettamistilanteissa (Vaulamo & Pehkonen 1999, 16). Tässä tutkielmassani tarkoitan matemaattisella ongelmanratkaisulla sellaista prosessia, jossa ratkaisija ratkaisee ongelmaa matemaattista tietoaan hyödyntämällä. Ongelmanratkaisuprosessista voidaan löytää tiettyjä säännönmukaisuuksia, joiden perusteella tutkijat ovat rakentaneet erilaisia ongelmanratkaisumalleja (Vaulamo & Pehkonen 1999, 18).

Pólyan (1945) mallia voidaan pitää eräänä tunnetuimmista ja ensimmäisistä ongelmanratkaisumalleista. Pólya esittää, että ongelmanratkaisuprosessissa voidaan erotta neljä vaihetta: ongelman ymmärtäminen, suunnitelman tekeminen, suunnitelman toteuttaminen ja ratkaisemisen tarkastelu. Jokaisella vaiheella on oma merkityksensä lineaarisesti etenevässä ratkaisumallissa. Pólya esittelee vaiheisiin liittyviä kysymyksiä ja ohjeita ratkaisun tueksi. (Pólya 1945, 5–18.)

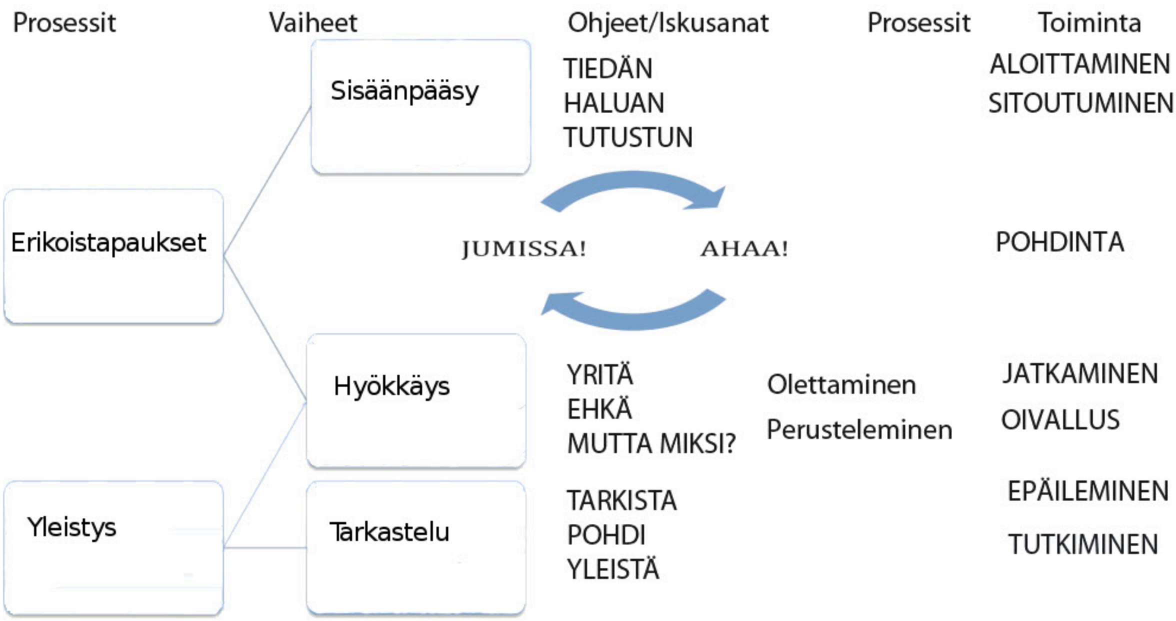
Ongelman ymmärtämisen vaiheessa ratkaisijan täytyy selvittää, mistä ongelmassa on kyse ja motivoitua sen pohtimiseen. Mikä on ongelman tuntematon? Mitä tietoja on annettu? Mitkä ovat ehdot, jotka yhdistävät tuntemattoman annettuun tietoon? Riittävätkö ehdot tuntemattoman määrittämiseen ja onko niiden täyttäminen mahdollista? Ratkaisija voi hahmottaa ongelmaa erittelemällä ongelman tietoja, piirtämällä kuvion sekä ottamalla käyttöön sopivat merkinnät. (Pólya 1945, 5–18.)

Hyvän *suunnitelman laatimisen* perustana ovat ratkaisijan kokemukset ja aikaisemmat tiedot. Sen laatiminen saattaa onnistua nopeasti oivaltamalla tai vaatia pitkää pohtimista ja useita yrityksiä. Suunnittelu kannattaa aloittaa etsimällä jokin tuttu ongelma, jossa on sama tai samantapainen tuntematon. Ongelman ratkaisemisen apuna saattaa toimia jonkin vastaavan ongelman ratkaiseminen. Kärsivällisyys on tärkeää *suunnitelman toteuttamisessa*. Ratkaisijan täytyy tarkistaa jokainen askel. Voiko nähdä selvästi, että askel on oikea? Voiko sen todistaa oikeaksi? (Pólya 1945, 5–18.)

Ratkaisemisen tarkastelussa ratkaisijan on arvioitava tehtyä. Voiko tuloksen tarkistaa? Voiko sen perustelut tarkistaa? Voiko ratkaisun johtaa toisella tavalla? Voiko tulosta tai menetelmää käyttää johonkin toiseen ongelmaan? (Pólya 1945, 5–18.)

Pólyan ongelmanratkaisumallia on usein tulkittu siten, että ongelmanratkaisuprosessi etenee järjestelmällisesti ja lineaarisesti vaiheiden mukaan. Malliin kohdistuneessa kritiikissä on kyseenalaistettu, toimiiko ratkaisija prosessinsa aikana näin järjestelmällisesti. Pólyan malli on kuitenkin ollut perustana monille ongelmanratkaisumalleille (Leppäaho 2007a, 54.)

Mason (1982) huomioi mallissaan edellisestä poiketen ongelmanratkaisuprosessin syklisyyden. Syklisyydellä tarkoitetaan sitä, että ratkaisuprosessi ei etene lineaarisesti kohti ratkaisua, vaan ratkaisija joutuu välillä palaamaan yrityksessään taaksepäin ja yrittämään uudelleen. Mallissa ratkaisuprosessi jakautuu kolmeen vaiheeseen: sisäänpääsyyn (entry), hyökkäykseen (attack) ja tarkasteluun (review). Masonin mukaan ratkaisijan täytyy kirjoittaa ylös iskusanoja ja niiden alle ajatuksiaan ja toimiaan. Nämä auttavat häntä jäsentelemään ratkaisuprosessia. (Mason ym. 1982, 18–19.)



Kuvio 3 Masonin (1982, 149) ongelmanratkaisumalli

Sisäänpääsyvaihe rakentaa pohjan tehokkaalle hyökkäykselle. Ratkaisijan on esitettävä itselleen kysymyksiä: Mitä tiedän? Mitä haluan eli mitä tehtävässä kysytään? Mitä voin esittää? Vastausten löytämiseksi ratkaisijan on luettava tehtävä huolellisesti. Omin sanoin kirjoittaminen on Masonin mukaan huomattavasti suoraa kopioimista hyödyllisempää. (Mason ym. 1982, 32–42.)

Kun ratkaisija on sisäistänyt ongelman ja tehnyt siitä omansa, hän siirtyy *hyökkäysvaiheeseen*. Tähän vaiheeseen liittyvät keskeisesti umpikujan kohtaaminen (jumissa!) ja ratkaisuidean keksiminen (ahaa!) sekä matemaattiset perusprosessit eli oletusten tekeminen sekä niiden todistaminen ja perusteleminen. Jumiin jääminen ja oivalluksen saaminen seuraavat toisiaan kehänä. (Mason ym. 1982, 42–43.) Joskus ratkaisijan on palattava takaisin ensimmäiseen vaiheeseen päästäkseen eteenpäin. Erikoistapauksia tutkimalla päästään vähitellen kohti löydetyn ratkaisuidean yleistämistä. (Mts. 51–52.)

Tarkasteluvaihe saavutetaan, kun ratkaisija on tyytyväinen ratkaisuun tai luovuttaa eikä yritä enää etsiä vastausta. Tämän vaiheen aikana ratkaisu käydään läpi ja tarkistetaan, pohditaan keskeisiä ideoita ja pyritään yleistämään ratkaisuideaa. Masonin mukaan ratkaisun ymmärtää perusteellisesti vasta, kun se sopii osaksi laajempaa kontekstia. (Mason ym. 1982, 43–47.)

Schoenfeld (1985, 107–108) määrittelee ongelmanratkaisumallinsa ongelmanratkaisustrategiaksi (*problem-solving strategy*). Hän kuvaa malliaan tavaksi, jolla useimmat järjestelmälliset ja hyvät ongelmanratkaisijat toimivat. Mallin päävaiheita ovat analyysi, suunnittelu, tutkiminen, toteutus ja tarkistaminen. Heuristisella strategialla Schoenfeld tarkoittaa mallissaan tekniikkaa, joka auttaa ymmärtämään ongelmaa paremmin.

Analyysivaiheessa ratkaisija tutustuu ongelmaan. Hänen tulee lukea tehtävä huolellisesti ja pohtia vastauksia esimerkiksi seuraaviin kysymyksiin: Mitä tietoja on annettu? Mitä kysytään? Miksi tehtävässä on annettu juuri kyseiset tiedot? Vaikuttaako siltä, että ratkaisu voidaan saavuttaa? Mitä periaatteita tai mekanismeja on järkevää soveltaa? Strategioiden toimivuus riippuu sekä ongelmasta että sen ratkaisijasta. Schoenfeld antaa joitakin esimerkkejä heurististen strategioiden käytöstä tässä ongelmanratkaisuprosessin vaiheessa:

- Kaavion piirtäminen, vaikka vaikuttaa siltä, että ongelman voi ratkaista muutenkin. Kuvat auttavat asioiden huomaamisessa.
- Ongelman havainnollistaminen tuloksilla, joita saa ratkaisemalla erikoistapauksia, tai voidaan huomata empiirisesti määriteltävistä kaavoista.
- Ongelman yksinkertaistaminen. (Schoenfeld 1985, 108.)

Suunnitteluvaihetta ei pidetä täysin erillisenä osana, vaan se ulottuu koko ratkaisuprosessiin. Suunnittelun avulla varmistetaan, että ratkaisija on sitoutunut kannattaviin toimintoihin. Ongelman ratkaisu pitäisi hahmotella karkeasti ja myöhemmin arvioida sitä yksityiskohtaisemmin ratkaisuprosessin edetessä. Esimerkiksi laskujen tekeminen ja monimutkaiset operaatiot tulisi suorittaa vasta sitten, kun ratkaisija on tarkastellut ratkaisun eri vaihtoehtoja, löytänyt niille selvän perustelun ja muut ongelman ratkaisun vaiheet ovat edenneet siihen asti, että tulosten laskeminen on välttämätöntä tai hyödyllistä. (Schoenfeld 1985, 108.)

Mallin heuristinen sydän on *tutkiminen,* sillä suurin osa ongelmanratkaisuheuristiikoista tulee käyttöön tässä vaiheessa. Tutkiminen jaetaan kolmeen vaiheeseen: lähes samanlaisten, hieman poikkeavien ja karkeasti poikkeavien ongelmien ja niiden ratkaisujen tarkasteluun. Näiden ongelmien ratkaisuja pyritään soveltamaan alkuperäiseen ongelmaan. *Toteutusvaiheessa* toteutetaan valittu ratkaisuyritys. Tämän tulisi olla vasta viimeinen vaihe varsinaisessa ongelmanratkaisussa. (Schoenfeld 1985, 110–111.)

Tarkistuksen merkitystä tulisi korostaa, sillä monesti prosessin viimeinen vaihe unohtuu. Ratkaisuprosessin tarkastamisen avulla voi keksiä vaihtoehtoisia ratkaisuja, huomata yhteyden toisiin aiheisiin tai tulla tietoiseksi käyttökelpoisesta ongelmanratkaisutavasta, joka toimii myös muualla. (Schoenfeld 1985, 111.)

Kirjallisuudessa käytetään usein heuristiikkoja sekä heuristisia ja ongelmanratkaisustrategioita toistensa synonyymeinä (Leppäaho 2007a, 44). Myös tässä tutkielmassani yhdistän nämä käsitteet toisiinsa. Schoenfeld (1985, 108–109) tarkoittaa heuristisella strategialla tekniikkaa tai esitystä, jonka tarkoituksena on auttaa ratkaisijaa ymmärtämään ongelma paremmin ja parhaimmassa tapauksessa ratkaisemaan se. Esimerkkejä strategioista ovat kaavion piirtäminen ja ongelman vertaaminen vastaaviin, helpompiin ongelmiin. Schoenfeld liittää tärkeimmät heuristiset strategiat ongelmanratkaisumallinsa vaiheisiin. Heuristiikkojen taustalla ovat yksilön kokemukset ongelmien ratkaisemisesta ja muiden ongelmanratkaisuprosessin seuraamisesta (Pólya 1945, 118). Heuristiikoilla voidaankin tarkoittaa ajatteluprosessien käynnistämistä, ylläpitämistä ja säätelyä (Haapasalo 1998, 26).

LeBlanc jakaa ongelmanratkaisustrategioita yleisiin ja auttaviin strategioihin. Yleisiä strategioita voidaan pitää kokonaisvaltaisina suunnitelmina ongelman ratkaisemiseksi. Auttavat strategiat toimivat apuvälineitä yleisten strategioiden toteuttamisessa. (LeBlanc 1977, 17.)

Taulukko 1 Ongelmanratkaisustrategiat LeBlancin (1977) mukaan

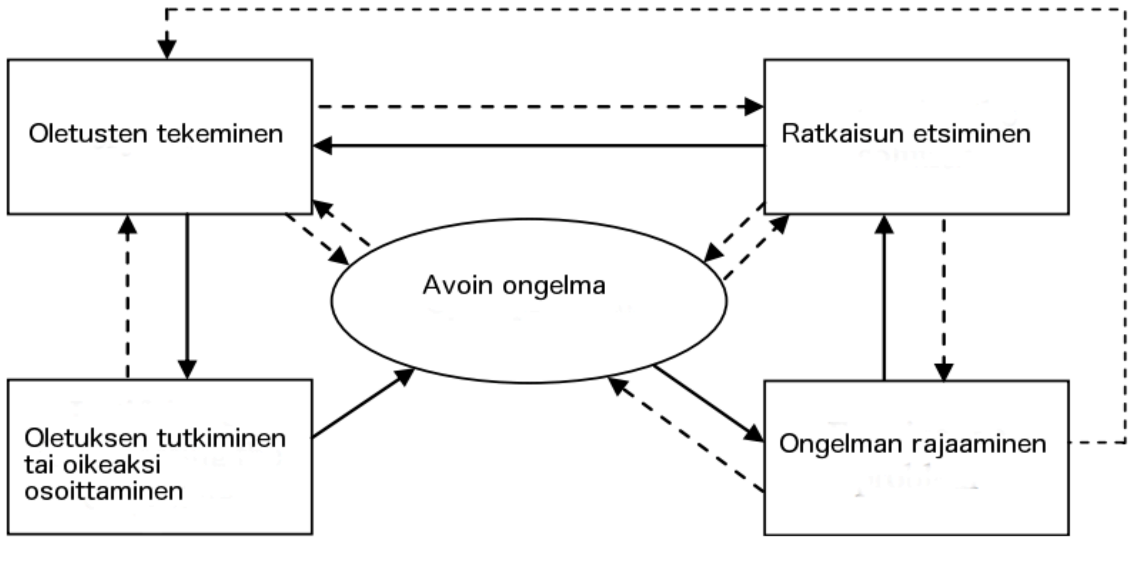
Yleiset strategiat	Auttavat strategiat
- Yritys ja erehdys - Järjestelmällinen lista eri mahdollisuuksista - Ongelman yksinkertaistaminen - Kaavan etsiminen ongelmasta - Kokeilu - Päättely - Yleistys - Takaperin työskentely	- Diagrammit - Taulukot - Piirrokset - Luettelot - Yhtälöt

Pólyan (1945), Masonin (1982) ja Schoenfeldin (1985) mallit kuvaavat matemaattisen ongelmanratkaisuprosessin etenemistä ja vaiheita. Kaikki edellä mainituista malleista sisältävät ongelman ymmärtämisen vaiheen, jossa ratkaisija selvittää, mitä tehtävässä kysytään ja millaisia ehtoja ratkaisulle annetaan. Schoenfeldin malli nostaa esiin myös analyysivaiheen, jossa ratkaisija esimerkiksi yksinkertaistaa ongelmaa tai tutkii erityistapauksia. Masonin mallissa puolestaan näkyy ongelmanratkaisun dynaamisuus, kun ratkaisija keksii ratkaisuideoita ja kohtaa umpikujia. Jokainen näistä malleista sisältää myös vaiheen, jossa ratkaisua pohditaan tai se tarkistetaan ongelmanratkaisuprosessin lopuksi. Ongelmanratkaisuprosessin kulku voi kuitenkin muuttua luokkahuoneen olosuhteiden, ongelman laadun tai teknologian hyödyntämisen myötä. (Hähkiöniemi, Leppäaho & Francisco, painossa.)

Hähkiöniemi ym. (painossa) ovat tutkineet oppilaiden ongelmanratkaisuprosesseja ja muodostaneet analyysinsä pohjalta mallin avoimesta ongelmanratkaisusta. Mallin mukaan ongelmanratkaisuprosessin vaiheita ovat ongelman rajaaminen (framing the problem), ratkaisun etsiminen (exploring solution), oletusten tekeminen (conjecturing) sekä oletuksen tutkiminen tai oikeaksi osoittaminen (justifying or investigating the conjecture). Kun ongelman lähtötilanne on avoin, ratkaisijan täytyy määritellä näkökulmat, joista ongelmaa tarkastellaan. Näiden valintojen tekeminen kuuluu *ongelman rajaamiseen*. *Ratkaisun etsimi-*

nen sisältää kaiken tehtävään liittyvän matemaattisen työn ennen oletukseen päätymistä. Tässä vaiheessa ratkaisija kehittää ja kokeilee erilaisia vaihtoehtoja. Etsiminen ei kuitenkaan aina johda oletuksen muodostumiseen. *Oletusten tekemisen* vaiheessa oppilaat ehdottavat vastausta ongelmaan. *Oletuksen tutkimisen ja oikeaksi osoittamisen* vaiheessa oppilas pyrkii selittämään, miksi hänen oletuksensa on järkevä. Joissain tapauksissa oppilaat eivät yritä osoittaa oletustaan oikeaksi, vaan selittävät, miten päätyivät ratkaisuunsa.

Ihanteellisessa ongelmanratkaisutilanteessa avoimen ongelman ratkaisija aloittaa prosessinsa päättämällä, mitä hän aikoo tutkia. Ratkaisija etsii ratkaisua, muodostaa oletuksen sekä tutkii oletuksen toimivuutta tai osoittaa sen oikeaksi. Seuraavaksi hän palaa takaisin avoimeen ongelmaan ja päättää tutkia jotakin toista ongelman ulottuvuutta ja aloittaa uuden ratkaisusyklin. Kuviossa 4 tällainen ratkaisuprosessi on kuvattu yhtenäisillä nuolilla. Yleensä ongelmanratkaisuprosessi ei kuitenkaan etene näin sujuvasti. Usein ratkaisijan täytyy palata takaisin prosessin edelliseen vaiheeseen. On mahdollista, että ratkaisija jopa jättää jonkin vaiheen väliin. Ratkaisuprosessin vaihtoehtoiset kulkutavat on merkitty kuvioon 4 katkoviivoin. Mallin tarkoituksena on kuvata oppilaiden ongelmanratkaisuprosessia oppituntien aikana, jolloin he eivät välttämättä tee suunnitelmaa ennen ongelman ratkaisemisen aloittamista. Tästä syystä malli ei edellisten tapaan sisällä selvää suunnitelman tekemisen vaihetta. (Hähkiöniemi ym. painossa.)



Kuvio 4 Ongelmanratkaisuprosessi avoimessa ongelmassa (Hähkiöniemi ym. painossa)

Malli korostaa opettajan roolia oppilaan ongelmanratkaisuprosessin tukijana. Sen lisäksi, että opettaja opastaa oppilasta tietyn vaiheen aikana, opettajat ohjaavat oppilaita siirtymään vaiheesta toiseen. Opettaja voi esimerkiksi ohjata oppilasta käymään läpi ongelman rajaamisen vaiheen, jos oppilas on lähtenyt ratkaisussaan suoraan kokeilemaan sattumanvaraisia vaihtoehtoja. Opettaja saattaa myös ohjata oppilasta osoittamaan oletuksensa oikeiksi, jos oppilas lähtee etsimään seuraavaa ratkaisua ennen edellisen sopivuuden varmistamista. (Hähkiöniemi ym. painossa.)

Tässä tutkielmassa lähestyn ongelmaa Hähkiöniemen ym. (painossa) avoimen ongelmanratkaisuprosessin mallin kautta. Pólyan (1945), Masonin (1982) tai Schoenfeldin (1985) malleissa esiintyvässä ongelman ymmärtämisen vaiheessa ratkaisija selvittää, mitä tehtävässä kysytään ja millaiset ehdot määrittävät sopivaa ratkaisua. Avoimen ongelmanratkaisuprosessin mallissa tarkastelunäkökulma valitaan ongelman rajaamisen vaiheessa. Kun oppilaat ratkaisevat ongelmaa matematiikan oppitunneilla, he eivät välttämättä laadi ratkaisusuunnitelmaa, kuten Pólyan (1945) ja Schoenfeldin (1985) malleissa. Schoenfeldin mallissa esiin nostetut tutkimisvaiheen heuristiset strategiat sisältyvät Hähkiöniemen ym. mallissa ratkaisun etsimiseen. Masonin (1982) mallin huomioima dynaamisuus ja aikaisempiin vaiheisiin palaaminen on selvästi esillä avoimen ongelman ratkaisuprosessissa. Tutkielmani kannalta keskeistä on myös opettajan rooli oppilaan ratkaisuprosessissa. Opettaja ohjaa oppilaita ratkaisuprosessin aikana ja voi esimerkiksi auttaa heitä ymmärtämään ja rajaamaan ongelmaa, palaamaan takaisin aikaisempiin vaiheisiin tai etenemään seuraavaan sekä arvioimaan ratkaisuehdotusta.

3 Ongelmanratkaisun opettaminen ja oppiminen

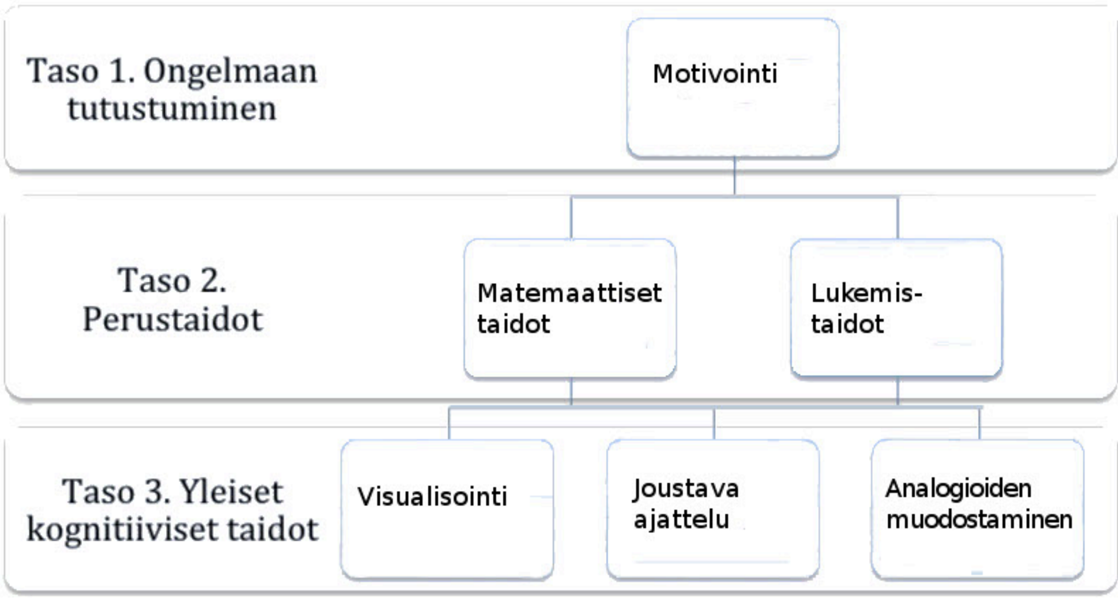
Ongelmanratkaisu kehittää monipuolisesti oppilaan taitoja. Näitä ovat esimerkiksi luovuus, huomiokyky, visualisointi, mallintaminen, arviointi ja mittaaminen, laskeminen, mielikuvitus, tiedon hankinta ja varmistaminen, järjestely- ja opiskelutekniikka, käytännöllisyys, sosiaalisuus ja kommunikaatio, viestintä sekä sitkeys. Jotta ongelmanratkaisuopetuksella edistettäisiin oppilaan taitoja näillä kaikilla alueilla, on opetuksen mielestäni oltava monipuolista ja huolellisesti suunniteltua. (Haapasalo 1998, 35.)

3.1 Matemaattinen ongelmanratkaisutaito

Matemaattisella ongelmanratkaisutaidolla voidaan tarkoittaa yksilön kykyä ratkaista ongelmia, joihin tarvitaan matemaattisen tiedon soveltamista erilaisia ratkaisumalleja ja strategioita monipuolisesti hyödyntäen. Mitä useampia ongelmaan soveltuvia malleja ja strategioita ratkaisija hallitsee, sitä taitavampi ongelmanratkaisija hän on. (Leppäaho 2007a, 51.) Ongelmanratkaisumallilla voidaan kuvata tapaa, jolla järjestelmälliset ja taitavat ratkaisijat toimivat ongelmatilanteissa (Schoenfeld 1985, 107–108) Ongelmanratkaisutaitoa voidaankin pitää ongelmanratkaisuprosessin tuntemisena ja hallitsemisena. Matemaattisten ongelmien ratkaisutaito ei ole yksittäinen kyky, vaan se koostuu useista tiedollisista ja taidollisista elementeistä, joita ratkaisija käyttää suunnitelmallisesti (Kinnunen & Vauras 1997, 269).

Matemaattisen ongelman ratkaisemisessa ratkaisijan taitoja voidaan tarkastella neljällä toiminnan tasolla. Ylimmällä, *käsitteellisellä tasolla* ymmärretään matemaattiset käsitteet, säännöt ja menettelytapojen taustalla olevat periaatteet. Tällä tasolla ongelmalle ja sen ratkaisuvaihtoehdoille annetaan matemaattinen sisältö. *Strategisella tasolla* ratkaisija valitsee ratkaisustrategiat kyseiselle ongelmalle. *Teknisellä tasolla* ratkaisija toteuttaa valittujen strategioiden mukaiset toiminnat. Tälle tasolle kuuluvat ratkaisua kohti vievät säännöt, sovitut merkitsemistavat ja laskemisen apuvälineiksi kehitellyt laskutekniikat (esimerkiksi allekkain laskemisen algoritmit). Alimmalla, *operaatioiden tasolla* ovat vähitellen automatisoituneet laskutoimitukset ja mentaaliset operaatiot, joita ratkaisuun pääseminen vaatii (esimerkiksi kertolaskun muistaminen osana jakolaskua). Taitava ratkaisija toimii monipuolisesti kaikilla näillä tasoilla. (Kinnunen & Vauras 1997, 270–271.)

Ongelmatilanteessa ratkaisija ei aina löydä vastausta ongelmaansa, vaan prosessi saattaa päättyä tai ratkaisija saattaa jopa hylätä kohtaamansa ongelman kokonaan. Moses (1982, 10–14) luokittelee oppilaan ongelmanratkaisun onnistumisen esteenä olevat vaikeudet kolmeen tasoon.



Kuvio 5 Ongelmanratkaisussa tarvittavat taidot (Moses 1982, 11)

Jos oppilas ei kiinnostu ongelmasta, sen ratkaiseminenkaan ei onnistu (taso1). Puutteet matemaattisissa taidoissa tai luetun ymmärtämisessä voivat muodostaa seuraavan esteen ongelman ratkaisemiselle (taso 2). (Moses 1982, 10–14.) Ongelmasta kiinnostuminen, ongelman edellyttämät matemaattiset taidot ja tehtävän ymmärtäminen näyttäisivät sisältyvän Pólyan (1945) ongelmanratkaisumallin ongelman ymmärtämisen ja suunnitelman tekemisen vaiheisiin, Masonin (1982) mallin sisäänpääsyvaiheeseen, Schoenfeldin (1985) analyysi- ja suunnitteluvaiheisiin sekä Hähkiöniemen ym. (painossa) mallissa ongelman rajaamisen vaiheeseen. Kolmannen tason vaikeudet ilmenevät oppilaiden yleisissä kognitiivisissa taidoissa. Ongelmanratkaisu vaatii esimerkiksi joustavaa ajattelua, sillä prosessin aikana on pystyttävä palaamaan takaisin ja muuttamaan ratkaisuyritystä. (Moses 1982, 10–14.) Joustava ajattelu ja prosessin aikaisempiin vaiheisiin palaaminen näkyy erityisesti Masonin (1982) hyökkäysvaiheen umpikujan kohtaamisessa ja ratkaisuideoiden keksimisessä. Myös Hähkiöniemen ym. (painossa) mallissa huomioidaan, että ongelmanratkaisijan täytyy usein palata prosessin aikana edellisiin vaiheisiin. Leppäaho (2007a, 49–50) laajentaa edellä mainittua jaottelua lisäämällä siihen vielä selektiivisyyden eli järkevän valitsemisen taidon. Ratkaisijan täytyy ongelmatilanteessa valita, millaisia tietoja, heuristiikkoja, strategioita tai ratkaisumalleja olisi järkevää käyttää. (Leppäaho 2007a, 49–50.) Ongelmanratkaisun edellytyksenä ovat riittävät valmiudet kaikilla neljällä tasolla. Ongelmanratkaisutaidon harjoittelemisen tulisikin vahvistaa oppilaan edellytyksiä jokaisella osa-alueella.

Schoenfeld (1985, 44–45) käsittää ongelmanratkaisuprosessin yksilön matemaattiseksi käyttäytymiseksi. Matemaattiseen käyttäytymiseen vaikuttavat tekijät hän jakaa neljään ryhmään: resursseihin, heuristiikkoihin, kontrolliin ja uskomuksiin. *Resurssit* ovat tietoa, jota yksilö kykenee tuomaan tilanteeseen. Resursseja ovat esimerkiksi yksilön omaksumat faktat ja menettelytavat. *Heuristiikat* ovat tehokkaan ongelmanratkaisun nyrkkisääntöjä. Esimerkiksi apupiirrosten avulla voidaan edistyä uudentyyppisessä tai vaikeassa ongelmanratkaisussa. *Kontrollilla* Schoenfeld tarkoittaa tehtyjen valintojen ja ratkaisuyritysten arviointia. Kontrollin avulla yksilö voi hyödyntää resurssejaan mahdollisimman tehokkaasti. Tietyn heuristisen strategian valinta tai hylkääminen on kontrolloitu päätös (Haapasalo 1998, 27). Yksilön *uskomukset* määrittävät, miten hän lähestyy ongelmaa, mitä menetelmiä hän käyttää ja kuinka hän sitoutuu työskentelemään ongelman ratkaisemiseksi.

Frank (Pehkosen & Zimmermannin 1990, 56–57, 60–61 mukaan) määrittelee matemaattisen ongelmanratkaisun osaksi laajempaa viitekehystä, joka sisältää esimerkiksi:

- yksilön aikaisemmat kokemukset matematiikassa,
- hänen matemaattisen tietoutensa,
- hänen tarpeensa matematiikan oppijana,
- hänen motivaationsa matematiikan oppijana,
- hänen matemaattiset uskomuksensa.

Keskeisenä viitekehyksen osana ovat myös yhteisön matemaattiset odotukset ja uskomukset matematiikasta, jotka muokkaavat jokaisen yksilön matematiikkakuvaa. Frankin mukaan oppilaan matematiikkaa koskevien uskomusten täytyy muuttua, jotta hänestä voi tulla parempi ongelmanratkaisija. (Pehkosen & Zimmermannin 1990, 56–57, 60–61 mukaan.) Koulussa tärkein ulkopuolinen ongelmanratkaisuprosessiin vaikuttava tekijä on opettaja, joka tuo tilanteeseen mukaan oman taustansa ja yleensä asettaa tarkasteltavan ongelman. Ympäröivän yhteiskunnan vaikutus näkyy esimerkiksi hallinnollisten määräysten, kuten opetussuunnitelman kautta. (Vaulamo & Pehkonen 1999, 20.) Ongelmanratkaisutaidon osia ovat siis kognitiivisen prosessin lisäksi myös esimerkiksi tunteet, motivaatio, asenteet ja uskomukset.

Ongelmanratkaisutaito on ongelmanratkaisuprosessin tuntemista, tiedon soveltamista ja strategioiden monipuolista hyödyntämistä. Taitava ratkaisija ymmärtää tehtävänannon, tarvittavat käsitteet ja säännöt sekä tuntee ongelmanratkaisustrategioita ja osaa valita niistä sopivimman. Ratkaisijalla on riittävät matemaattiset tiedot ja hän hallitsee tarvittavat lasku- ja merkitsemistavat. Onnistuneessa ratkaisutilanteessa ratkaisija motivoituu ongelmasta ja kiinnostuu vastauksen etsimisestä. Ongelmanratkaisuprosessin hallitseminen edellyttää myös joustavaa ajattelua, sillä usein ratkaisijan on palattava takaisin ja muutettava ratkaisuehdotustaan tai lähestymistapaansa. Taitava ratkaisija osaa myös arvioida tekemiään valintoja ja ratkaisuyrityksiään. Jokaiseen ongelmanratkaisuprosessin vaiheeseen aina tehtävän ymmärtämisestä ratkaisun arviointiin näyttäisikin liittyvän useita osataitoja, joista yhdessä muodostuu toimiva kokonaisuus ongelman ratkaisemisen tueksi. Ongelmanratkaisutaito on varmasti osaltaan myös tilannesidonnaista: tietyt opitut ratkaisumallit tai strategiat toimivat toisessa tilanteessa, mutta saattavat toisinaan olla riittämättömiä.

3.2 Matemaattisen ongelmanratkaisun opettaminen

Ongelmanratkaisun opettamista ovat kaikki ne toimenpiteet, joilla tuetaan oppilaan ongelmanratkaisutaidon kehittymistä (Haapasalo 1998, 129). Ongelmanratkaisusta voidaan usein puhua kahdesta eri näkökulmasta: Varsinaisen ongelmanratkaisun opettaminen tarkoittaa ongelmanratkaisuprosessin opettelua esimerkiksi erillisiä ongelmia käyttäen. Ongelmanratkaisun avulla opettaminen puolestaan tarkoittaa ongelmanratkaisun käyttämistä opetusmenetelmänä. (Pehkonen & Zimmermann 1990, 43.) Tässä yhteydessä tarkastelen pääasiassa varsinaisen ongelmanratkaisutaidon opettamista.

Ongelmanratkaisuprosessin etenemistä on harjoiteltava, jotta oppilaat kehittyisivät taitaviksi ongelmien ratkojiksi. Jos ongelmanratkaisuprosessi on oppilaalle täysin vieras, tulisi opetuksen lähteä liikkeelle luonnollisista ja rakenteeltaan yksinkertaisista ongelmatilanteista, joiden ratkaisemiseen tarvitaan vain muutamaa tuttua strategiaa. Oppilaalle tulisi tarjota onnistumisen kokemuksia ja malli ongelmanratkaisuprosessista. Opettajan on osattava olla esimerkkinä siitä, miten ongelmatilanteissa käyttäydytään. Kun ongelmanratkaisusta on tullut opetuksen luonnollinen osa, oppilaat saavat varmuuden osaamisestaan ja haluavat kehittää ajatteluaan. Opettaja voi vähitellen siirtyä taustalle ja antaa tilaa oppilaiden oivalluksille. Asteittain voidaan siirtyä kohti monimutkaisempia tekniikkoja. Tavoitteena on saada oppilaat arvostamaan ratkaisuprosessia yhtä paljon kuin lopputulosta, esittämään ongelmia useilla eri tavoilla, etsimään erilaisia ratkaisumalleja sekä muotoilemaan itse ongelmia todellisista tilanteista. Oppilaiden tulisi päästä ratkaisemaan myös ongelmia, jotka vaativat yhteistyötä ja ideoiden jakamista tai teknisten apuvälineiden käyttöä. Tärkeintä on opettaa oppilaita tunnistamaan ja hyväksymään ongelmatilanteet sekä auttaa heitä kehittämään kokemuksiaan ja ideoimaan vapaasti. (Haapasalo 1997, 86–88; 1998, 224–225). Ongelmanratkaisutaidon kehittäminen edellyttää sekä systemaattisuuden että luovan lähestymistavan yhdistämistä. Monimutkaiset matemaattiset ongelmat saavutetaan vain systemaattisen matemaattisen tiedon avulla, ja ilman luovuutta ongelmanratkaisu jää mekaanisen toistamisen tasolle. (Vaulamo & Pehkonen 1999, 26.)

Ongelmanratkaisuprosessin opetteluun kuuluu myös ongelmanratkaisustrategioihin tutustuminen ja niiden käytön harjoittelu. Ongelmanratkaisustrategia on ennalta opittu keino, joka valitaan kunkin ongelman ratkaisemiseen. Ratkaisijan on valittava itse, minkä keinon hän tuntemistaan strategioista valitsee. Strategia sisältää ne työskentelytavat, joita ongelmanratkaisussa voidaan käyttää. Esimerkkitehtävien avulla näitä strategioita voidaan opetella ja harjoitella. (Leppäaho 2007a, 45.) Ongelmanratkaisun opettelun alkuvaiheissa opettaja saattaa suositella oppilaille toimivia strategioita, mutta kokemuksen karttuessa oppilaat osaavat itse valita tuntemistaan strategioista sopivimman (LeBlanc 1977, 17). Oman ratkaisuprosessin ja strategioiden käytön kontrollointia eli säätelyä ja ohjailemista voidaan harjoitella esimerkiksi ajattelemalla ääneen ja vastaamalla ratkaisun kannalta kriittisiin kysymyksiin (Haapasalo 1998, 275–276).

Heuristisia strategioita opettamalla pyritään helpottamaan ongelmanratkaisua tuomalla tiedostamatonta toimintaa tietoisuuteen. Tällaisten ajattelun nyrkkisääntöjen tietoiseksi tekeminen, oppiminen ja opettaminen voivat olla hyödyllisiä ongelmanratkaisun opettelussa. (Pehkonen 1991, 15–16.) Tutkijat eivät kuitenkaan ole yksimielisiä heurististen strategioiden opettamisen tehokkuudesta ja toimivuudesta (Haapasalo 1998; Leppäaho 2007a; Pehkonen 1991). Voidaan joka tapauksessa sanoa, että heurististen strategioiden opettaminen tulisi aloittaa mahdollisimman yksinkertaisilla strategioilla. Negatiivisten tunteiden ja kokemusten välttäminen on tärkeää, kun pyritään tekemään heuristiikkojen käytöstä rutiinia. (Haapasalo 1998, 130.) Vaikka näitä strategioita opetetaan ja opitaan, ei osaaminen vielä takaa niiden tehokasta käyttöä. Uudenlaisissa tilanteissa yksilöiden välillä on suuria eroja kyvyissä tiedostaa tarjolla olevat strategiat ja valita niistä käytettäväksi sopivimmat. (Pehkonen & Zimmermann 1990, 55.)

Esimerkiksi Leppäaho (2007a) on kehittänyt ongelmanratkaisuopetuksen tueksi ratkaisukarttamenetelmän. Sen ajatuksena on, että oppilas oppii kokoamaan ongelmasta ja tehtävästä muistiinpanot. Ratkaisukarttaan sisältyvät tehtävässä annetut tiedot, mahdollinen apupiirros ja oikea ratkaisu. On tärkeää, että oppilas kirjaa myös väärät ratkaisuyritykset osaksi ratkaisuaan. Oppilas voi palata kartan avulla tarkastelemaan ratkaisuyrityksensä vaiheita, ja opettaja pääsee sen kautta käsiksi oppilaan ongelmanratkaisuprosessiin. Kartta voi auttaa oppilasta löytämään olennaiset tiedot, hahmottamaan ja ymmärtämään tehtävää sekä muistamaan prosessin aikaisemmat vaiheet. (Leppäaho 2007a, 96–102; 2007b, 95–107.)

Perinteisesti ongelmanratkaisua on opetettu mallioppimisen kautta. Opettaja esittelee esimerkkien avulla menettelytavan, jota käyttämällä oppilaat ratkaisevat samanlaisia ongelmia. (Pehkonen & Zimmermann 1990, 34.) Ongelmanratkaisuprosessin harjoitteleminen ja ongelmatehtävien tekeminen tarjoavat mahdollisuuden toteuttaa matematiikan opetusta muutenkin kuin oppikirjaa täyttäen ja opettajan mallia jäljitellen. Kun tavoitteena on ajattelutoimintojen kehittäminen, ovat oppilaskeskeiset työtavat opettajakeskeisiä tehokkaampia (Pehkonen 1991, 17). On olemassa näyttöä siitä, että oppilaiden ajattelutaso siirtyy oikean vastauksen etsimisestä korkeammalle tasolle, kun he saavat esittää omia ideoitaan ja menettelytapojaan, joita toiset oppilaat pääsevät kommentoimaan esittämällä omia käsityksiään (Leino 1997, 50). Opettajan olisikin otettava opetustilanteessa uusi rooli puheenvuorojen jakajana ja keskusteluun provosoijana, kun hän pyrkii kehittämään luokan vuorovaikutusta ja antamaan tilaa oppilaiden omille selityksille. (Pehkonen & Zimmermann 1990, 22–23.)

Sen lisäksi, että opettaja toimii mallina ratkaisuprosessin etenemisestä, hänellä on ongelmanratkaisutilanteissa myös tärkeä rooli kannustajana, positiivisten kokemusten tarjoajana ja asenteiden muokkaajana. Matematiikan oppiminen edellyttää, että oppilas kokee onnistumisia ja oppii luottamaan ja uskomaan itseensä. (Huhtala 1999.) Oppilaat kohtaavat matemaattisia taitoja vaativia aineita opiskellessaan useita ajattelua ja pohdintaa vaativia ongelmia. Jatkuva epävarmuus ja epäonnistumiset ongelmatehtävissä saattavat aiheuttaa pelkoa matemaattis-luonnontieteellisiä aineita kohtaan. Voidaankin puhua jopa matematiikkapelosta. (Leppäaho 2007a, 18.) Epäonnistumiset saattavat näkyä torjuvana suhtautumisena matematiikkaan ja heijastua oppilaan tilanneorientaatioon. Tilanneorientaatiolla tarkoitetaan oppilaan intentionaalista toimintaa tietoisissa tai tiedostamattomissa tilanteissa. Se ei ole pysyvä tyyppi, vaan muuttuu tilanteen mukaan. Minäorientoitunut oppilas pyrkii itsensä suojaamiseen ja puolustamiseen korvaavilla toiminnoilla. Hän välttelee toimintaa ja siirtää syyn pois itsestään. Luopumisorientaatiolla puolestaan tarkoitetaan yksilön intentiota olla osallistumatta tehtävään. (Yrjönsuuri 2007, 108–110.) Ongelmanratkaisuprosessi ei käynnisty, jos oppilas ei kiinnostu ongelmasta tai sitoudu sen ratkaisemiseen.

Matematiikan opiskelussa asenteita voidaan muokata tuomalla esiin matematiikan hauskuus, hyödyllisyys ja esteettisyys. On tärkeää, että oppija kokee löytäneensä ratkaisun kauan pohtimaansa ongelmaan. Heikosti menestyvien oppilaiden positiivisen asenteen, luovuuden ja itseluottamuksen vahvistaminen ovatkin tärkeimmässä asemassa. (Vaulamo & Pehkonen 1999, 17, 26.) Opettaja voi motivoida oppilaita esimerkiksi valitsemalla vaikeustasoltaan sopivia tehtäviä tai integroimalla ongelmanratkaisua muiden oppiaineiden aihepiireihin (Leppäaho 2007a, 48). Opetuksen tavoitteena voidaan pitää sitä, että oppilaat oppisivat arvostamaan matematiikkaa, uskomaan omiin kykyihinsä käyttää sitä sekä viestimään ja järkeilemään matemaattisesti. Heidän tulisi kypsyä vähitellen matemaattisten ongelmien ratkaisijoiksi, jotka uskaltavat luottaa kykyihinsä, kokeilla, arvailla ja jopa tehdä ja korjata virheitä. (Haapasalo 1997, 91.)

3.3 Opettaja luokkahuonekeskustelun luojana

Luokkahuonetutkimuksessa on perinteisesti kiinnitetty huomio opettajan puheeseen, opettajan tekemiin kysymyksiin sekä oppilaiden vastauksiin. Kommunikoinnin merkitykseen on alettu kiinnittää enemmän huomiota myös matematiikan opetuksen tutkimuksessa. Kommunikoinnin asema on keskeinen, kun oppilaat muodostavat matemaattisia käsitteitä. (Ahtee ym. 2005, 94–95.) Matematiikan oppiminen on myös sitä, että oppii käyttämään käsitteellistä kieltä puheen ja kirjoituksen lisäksi myös päättelyssä ja ongelmanratkaisussa. (Ahtee & Pehkonen 2005, 299). Jos opettaja haluaa ymmärtää oppilaita ja auttaa heitä ymmärtämään opetettava asia, on hänen kuunneltava oppilaitaan ja seurattava heidän ajatteluprosessejaan. (Ahtee ym. 2005, 94–95). Ongelmien ratkomisen yhteydessä olisikin tärkeää, että neuvomisen ja ohjaamisen lisäksi opettaja osaa myös kuunnella oppilaan ajattelua ja oltava tietoinen hänen ratkaisuprosessistaan.

Luokkahuonekeskustelu on tärkeä vuorovaikutusprosessi (Sahlström 2001, 93–94). Koulussa tapahtuva opiskelu on aina vuorovaikutusta sekä opettajan ja oppilaiden välillä että oppilaiden kesken (Aho 1997, 30). Opettajan aktiivista toimintaa vuorovaikutustilanteissa voidaan kutsua opetukseksi ja oppilaiden toimintaa oppimiseksi. (Uusikylä & Atjonen 2005, 20–21.) Vuorovaikutuksella tarkoitetaan yksilöiden välistä suhdetta, joka ilmenee heidän viestinnässään ja kanssakäymisessään. Viestintä koostuu kielellisten ilmausten lisäksi ei-kielellisestä, nonverbaalista ilmaisusta. Vuorotellen vaikuttaminen on sekä vuoropuhumista että vuorokuuntelua. Vuorovaikutukseen liittyy aina tunteita, sillä se syntyy ihmisten kohtaamisesta sekä tästä kokemuksesta muodostuvista tulkinnoista. Vuorovaikutustaitoja ovat esimerkiksi katsekontakti, kiinnostuksen osoittaminen, kuuntelu, kysely sekä tilanteen mukainen aktiivisuus. Hyvässä vuorovaikutustilanteessa ihmiset ovat positiivisesti läsnä ja haluavat ymmärtää toisiaan. Sen muodostumiseen vaikuttavat oppimistilanteen ilmapiiri, ympäristö sekä osapuolten aikaisemmat kokemukset. (Repo-Kaarento & Levander 2002, 141–142.) Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet (POPS 2004, 18) toteaakin, että koulun oppimisympäristön tulee edistää vuoropuhelua ja tukea sekä oppilaiden keskinäistä että opettajan ja oppilaan välistä vuorovaikutusta. Tavoitteena on luoda avoin, rohkaiseva, kiireetön ja myönteinen ilmapiiri. Vastuu sen ylläpitämisestä kuuluu sekä opettajalle että oppilaille.

Opettaminen on vuorovaikutusta: asian esittämisen ja kysymysten tekemisten lisäksi opettajan tulisi osata myös kuunnella. Auttaakseen oppilaita ymmärtämään käsitteitä opettajan täytyy tuntea oppilaittensa tavat ajatella (Ahtee ym. 2005, 94). Opetus on myös intentionaalista eli tavoitteellista toimintaa. Opetuksen vuorovaikutustilanteessa oppilaan tavoitteena tulisi olla jonkin tiedon tai taidon omaksuminen ja sisäistäminen, opettajan intentiona taas oppijan oppimaan saattaminen sekä tukeminen ja auttaminen tavoitteen saavuttamiseksi. (Aho 1997, 27.) Oppilaiden välisellä vuorovaikutuksella voidaan lisätä tietoisuutta tavoitteista ja oppilaiden rooleista. Tämä auttaa oppilaita ottamaan vastuuta omasta ja toisten oppimisesta sekä reflektoimaan oppimistuloksia. (Havu-Nuutinen & Järvinen, 1997, 150.)

Jokainen koulu ja luokka ovat erilaisia, mutta samanaikaisesti ne ovat monella tapaa samanlaisia (Bergqvist 2001, 36–37). Luokkahuonevuorovaikutukseen kuuluu useita kirjoittamattomia lakeja ja toimintakäsikirjoituksia, joita opettajat ja oppilaat noudattavat useimmiten huomaamattaan (Tainio 2007, 16). Koulun vuorovaikutusta voidaan kuvailla institutionaaliseksi. Keskustelun institutionaalisuus näkyy siinä, että opettaja määrittelee keskustelun aiheen ja ohjaa sitä eteenpäin kysymyksien avulla sekä päättää uuteen puheenaiheeseen siirtymisestä. (Karvonen 2007, 119). Luokkahuonekeskustelussa opettajalla on enemmän valtaa kuin oppilailla määrätä, kuka puhuu ja mistä puhutaan (Tainio 2007, 50–51; Myhill 2006). Myös oppilaat voivat ottaa tunnilla aktiivisen roolin vastaamalla opettajan kysymyksiin sekä esittämällä vuoroja oma-aloitteisesti (Karvonen 2007, 119). Oppilaat voivatkin toimia aloitteentekijöinä luokkahuoneen vuorovaikutuksessa, eikä se ole aina selvästi opettajajohtoista (Vepsäläinen 2007, 156). Koulutus ja kokemus kuitenkin asettavat opettajan vastuulliseen rooliin opetustapahtuman ohjaajaksi (Uusikylä & Atjonen 2005, 21). Opettajan toiminta vaikuttaa myös oppilaiden välisiin suhteisiin, ja demokraattinen ohjaustyyli voi vahvistaa oppilaiden välisiä persoonallisia suhteita (Koskenniemi 1982, 36).

Leiwon, Kuusisen, Nykäsen ja Pöyhösen (1987b) tutkimus osoittaa, opettajat vastasivat huomattavan suuresta osasta luokkakeskustelun ilmauksia: 78 % oppituntien ilmauksista on opettajan tekemiä. Näyttääkin siltä, että opettaja hallitsee luokkahuonekeskustelua määrällisesti ja toimii keskustelun johtajana, vaikka erot yksittäisten oppituntien välillä ovat suuria. Tietoa esittävät, toimintaa jaksottavat ja kysyvät puheenvuorot ovat pääsääntöisesti opettajan, kun taas yli 90 % vastausilmauksista on oppilaiden tekemiä. Tutkimuksen mukaan opettajan tekemät kysymykset ovat sisällöltään melko yksipuolisia, lähinnä nimeämis- ja luokittelu sekä kuvaamis- ja määrittelykysymyksiä. Yli puolet oppilaiden ilmauksista on vastauksia. Aineiston perusteella opettaja osoittaa puheenvuoronsa vain harvoin tietylle oppilaalle tai keskustelee oppilaan kanssa kahden kesken. (Leiwo ym. 1987b, 5–22, 168–176.)

Opettajan tekemiä kysymyksiä on tarkasteltu luokittelemalla niitä erilaisten mallien mukaan (esim. Ahtee ym. 2005, Myhill 2006). Ahtee ym. (2005) jakaa opettajan tekemät kysymykset neljään luokkaan: opetetun tiedon osaamista arvioiviin kysymyksiin, produktiivisiin kysymyksiin, käsitteelliseen muutokseen tähtääviin kysymyksiin sekä keskusteluun johtaviin kysymyksiin. *Opetetun tiedon osaamista arvioivat kysymykset* testaavat opetettua tietoa ja edellyttävät alempitasoisina tietämistä, selittämistä ja soveltamista sekä korkeampitasoisina analysoimista, syntetisointia ja arvioimista. *Produktiiviset kysymykset* liittyvät ongelmaan, johon oppilaan on tarkoitus löytää ratkaisu. Kysymyksellään opettaja voi kiinnittää oppilaan huomion johonkin yksityiskohtaan. Kysymys voi edellyttää oppilaalta vertailua, päättelyä perusteluineen, apukuvioiden piirtämistä tai pieniä kokeiluita. Opettajan kysymys voi kannustaa oppilaita tekemään omia kysymyksiä, jotka auttavat ratkaisujen löytämisessä. (Ahtee ym. 2005, 96–97.) Produktiivisten kysymysten voi nähdä kannustavan oppilaita erilasten ongelmanratkaisustrategioiden käyttöön. Päättely, kuvioiden piirtäminen ja kokeilu ovatkin esimerkkejä ongelmanratkaisustrategioista (LeBlanc 1977, Schoenfeld 1985), joita esittelin tarkemmin luvussa 3.3. *Käsitteelliseen muutokseen tähtäävät kysymykset* luovat vaihtoehtoisia käsityksiä, haastavat oppilaita pohtimaan asiaa uudelleen ja ratkaisemaan käsitystensä ristiriitaisuuksia sekä kannustavat heitä soveltamaan tietojaan uusissa tilanteissa. *Keskusteluun johtavat kysymykset* ohjaavat oppilaita esimerkiksi selittämään ajatuksiaan, yhdistämään ja soveltamaan oppimaansa sekä laajentamaan ajatteluaan toisiin tilanteisiin. (Ahtee ym. 2005, 96–97.)

Edellisen lisäksi kysymyksiä voidaan jaotella esimerkiksi Myhillin (2006) mallin mukaan. Hänen luokituksensa perustuvat kysymysten muotoon ja funktioon. Hän jakaa kysymykset niiden muodon perusteella neljään ryhmään: suljettuihin (factual), avoimiin (speculative), oppimisprosessiin liittyviin (process) sekä toimintatapaan (procedural), kuten tunnin järjestykseen ja organisointiin liittyviin kysymyksiin. *Suljetuilla kysymyksillä* tavoitellaan tiettyä ennalta määriteltyä vastausta (Kuinka paljon on viisi plus viisi?). *Avoimet kysymykset* eivät edellytä ennalta määriteltyä vastausta, vaan oppilaat voivat esittää mielipiteitään, hypoteeseja ja ideoita (Onko se mielestäsi hyvä ajatus?). *Oppimisprosessiin liittyvät kysymykset* kannustavat oppilaita selittämään ajatteluaan (Mistä tiedät sen?). *Toimintaan liittyvät kysymykset* ohjaavat tunnin kulkua (Näkevätkö kaikki?). (Myhill 2006, 25–26.)

Myhill (2006, 25) toteaa, että vaikka kysymykset ovat muodoltaan suljettuja ja tiettyä ennalta määrättyä vastausta tavoittelevia (Onko tämä verbi vai adjektiivi? Miksi kasveilla on kukat? Mitä muuta voisin käyttää mittaamiseen?), voi niiden funktio poiketa toisistaan. Ensimmäiseen kysymykseen vastaamiseksi riittää faktatiedon muistaminen, eikä asian ymmärtäminen ole välttämätöntä. Toiseen kysymykseen vastatakseen oppilaan tulisi osata ajattelussaan yhdistää kukat ja aikaisemmin opetellut tiedot siementen merkityksestä kasville. Vaikka viimeiseen kysymykseen on olemassa tietty joukko sopivia vastauksia, ohjaa se kuitenkin lapsia pohtimaan toimivia mittaamisen tapoja. Myhill jakaakin kysymysten funktiot yhteentoista luokkaan, joita ovat luokan hallinta (class management), faktojen esiintuonti (factual elicitation), vihjeiden antaminen (cued elicitation), sisällön kokoaminen (building on content), ajattelun kannustaminen (building on thinking), kertaus (recapping), harjoittelu (practising skills), aikaisemman tiedon selvittäminen (checking prior knowledge), sanaston kehittäminen (developing vocabulary), ymmärryksen varmistaminen (checking understanding) sekä reflektion kehittäminen (developing reflection). (Myhill 2006, 26–27.)

Arkikeskustelussa kysymykseen vastataan yleensä seuraavassa puheenvuorossa (Kleemola 2007, 61). Jos kysymykseen ei vastata heti sen esittämisen jälkeen, on tavallista, että kysymyksen esittäjä toistaa kysymyksensä, muotoilee sen uudestaan tai tarkentaa sitä (Raevaara 1997, 79). Luokkahuoneen vuorovaikutus ei aina noudata samanlaista periaatetta, vaikka mahdollisia vastaajia opettajan esittämään kysymykseen on useita. Jotkin vastauksista opettaja arvioi sopiviksi, mutta toisia täytyy hänen mielestään korjata. Arkikeskustelussa kysymys esitetään usein silloin, kun kysyjältä puuttuu jokin tieto, jonka vastaaja voi tarjota. Koulussa opettaja ei kuitenkaan kysy aina siksi, että häneltä puuttuisi tietoa, vaan sen takia, että hänellä on tietoa, jota oppilailla ei välttämättä ole. Opetustilanne eteneekin usein opettajan esittämien kysymysten ja oppilaiden vastausten kautta. Kysymysten avulla voidaan opettaa uutta tietoa, kerrata vanhaa tai testata oppilaiden tietoja. (Kleemola 2007, 61–62.) Osa opettajan kysymyksistä on luonteeltaan ennemminkin toteamuksia kuin kysymyksiä. ”Aloittaisimmeko?” sekä ”Ottaisitteko kynänne esille?” ovat esimerkkejä kehotuksesta, johon ei odoteta oppilailta kielellistä vastausta. (Myhill 2006, 25.) Oppilaat eivät aina uskalla tai halua vastata kysymyksiin, vaikka he tietäisivätkin oikean vastauksen. Kleemolan (2007) mukaan opettajan kannattaa aloittaa kyselevä opetus kysymyksellä, johon mahdollisimman moni oppilas osaa vastata. Ensimmäisen kerran viitanneet oppilaat osallistuvat opetukseen aktiivisemmin myöhemminkin saman tunnin aikana. (Kleemola 2007, 62,88.)

Hähkiöniemi ja Leppäaho (2012) ovat muodostaneet mallin **opettajan antaman ohjauksen tasoista**. Malli perustuu tutkimukseen, jossa opettajaopiskelijat tutustuivat hypoteettisiin matematiikan opetustilanteisiin ja ratkaisuehdotuksiin sekä kertoivat, miten olisivat arvioineet ja kommentoineet kyseisiä vastauksia. Tutkijat esittävät opettajan antavan ohjausta kolmella tasolla. *Pintapuolisella ohjauksella* (surface-level guidance) tarkoitetaan tilannetta, jossa opettaja ei huomaa jotakin vastauksen keskeistä osaa tai palaute ei liity oppilaan ratkaisuun. *Paljastavasti ohjaava* (inactivating guidance) opettaja huomioi vastauksen keskeiset näkökulmat, mutta paljastaa tutkimisen lopputuloksen tai pyytää toista ratkaisua motivoimatta oppilasta. *Aktivoivalla ohjauksella* (activating guidance) opettaja kiinnittää oppilaan huomioon keskeisiin asioihin tehtävässä tai ratkaisussa ja ohjaa oppilasta tutkimaan tätä näkökulmaa tai motivoi oppilasta etsimään toisen ratkaisun. (Hähkiöniemi & Leppäaho 2012.)

Opettajan oppilailleen antama palaute voidaan Pintrichin ja Schunkin mukaan jakaa neljään tyyppiin. *Suorituksiin liittyvä palaute* antaa oppilaille korjaavaa informaatiota ja kertoo, miten hyvin oppilas on työnsä suorittanut. *Motivaatioon liittyvä palaute* antaa epäsuoraa tietoa oppilaan osaamisesta. Sen tehtävänä on saada oppilas ylläpitämään opiskelumotivaatiota. Motivaatiopalaute voi sisältää sosiaalisesti vertailevaa tietoa siitä, millaiset kyvyt oppilaalla on muihin oppilaisiin nähden. *Attribuutiopalauteen* kautta opettaja yhdistää oppilaan suoritustason hänen ominaisuuksiinsa. Oppilaita voidaan kehottaa yrittämään, kun aikaisemmat saavutukset liitetään yrittämisen määrään. Oppilasta voidaan kannustaa uskomaan, että kovalla työllä saavutetaan tuloksia. *Strategiapalaute* auttaa oppilaita huomaamaan, miten onnistuneesti he ovat toteuttaneet jotakin oppimisstrategiaa suoritustensa parantamiseksi. (Pintrich & Schlunk 2002, 318–322.)

Opettajan toimintaa matematiikan oppitunneilla voidaan tarkastella myös erilaisten **kuuntelemistasojen** kautta. Alimman tason muodostaa opettajan *kuuntelemattomuus*. Tällöin opettaja voi kuunnella kuulematta tai sivuuttaa kokonaan kuulemansa. Opettaja saattaa sivuuttaa kuulemansa, koska haluaa mennä asiassa eteenpäin tai koska kysymys tai kommentti saattaisi johtaa keskustelun sivuraiteille. *Valikoivasti kuunteleva* opettaja puolestaan kuuntelee osan oppilaiden puheenvuoroista. *Arvioivaan kuuntelemiseen* sisältyy opettajan arvio oppilaan vastauksen oikeellisuudesta. Opettajalla on valmiiksi mielessä jokin mallivastaus, johon hän vertaa oppilaan ehdotusta. Arvio voi olla vain yksinkertainen nyökkäys tai lyhyt kommentti. Arvioivasti kuunteleva opettaja saattaa myös kommentoida oppilaan vastausta muokkaamalla käytetyt termit korrektiin muotoon. *Tulkitsevasti kuunteleva* opettaja yrittää ymmärtää oppilaan vastauksen matematiikan opettajana ja tulkita sitä positiivisesta lähtökohdasta. Hänellä ei ole mielessään valmista vastausta ja opettaja saattaa esimerkiksi toistaan oppilaan vastauksen toisilla sanoilla ja siten prosessoida kuulemaansa. Ylin taso on *avoin kuunteleminen*. Tällöin opettaja arvostaa oppilaan ajatuksia ja hänen tavoitteensa on ymmärtää, mistä ajatukset ovat tulleet ja mihin oppilas pyrkii. Oppilaan ei odoteta ajattelevan tietyllä tavalla, vaan hänellä on vapaus kehittää uusia ajatuksia. Ahtee ja Pehkonen ovat oppitunteja havainnoidessaan huomanneet, että opettajien kuuleminen pysyy yleensä kolmella ensimmäisellä tasolla. Jos opettaja keskittyy kuulemaan vain oikeita vastauksia, ohjaa hän samalla oppilaita kaavamaiseen ajatteluun. Kommunikaatio paranee, kun opettaja osoittaa, että hän haluaa ymmärtää, mitä oppilas tarkoittaa. (Ahtee & Pehkonen 2005, 301–305.)

Luokkahuonevuorovaikutusta on tutkittu monista näkökulmista. Luokan kommunikaatiota tutkittaessa voidaan havainnoida esimerkiksi kuka puhetta johtaa, miten puheenvuorot jaetaan, kuka tekee puhealoitteita, kommentoivatko oppilaat toisiaan suoraan, jakautuvatko oppilaiden puheenvuorot tasaisesti, miten osallistumista rajoitetaan tai kannustetaan, miten paljon luokassa on pienryhmäkeskusteluja sekä esimerkiksi sitä, saavatko oppilaat keskustella vieruskaverin kanssa tai liikkua luokassa keskustelemassa. (Horppu 1993.) Kielellisten elementtien lisäksi luokan vuorovaikutus koostuu myös nonverbaalista viestinnästä. Yksilöiden todellisten tunteiden ja asenteiden ymmärtämiseksi tulisi analysoida myös nonverbaaleja viestejä. Tällaisen viestinnän analysointi onnistuu parhaiten videotallenteiden avulla, jolloin oppilaiden nonverbaalisia ilmaisuja voidaan tarkastella useaan kertaan. Analyysi on kuitenkin työlästä, sillä yhdenkin oppitunnin toiminnoissa on paljon yksityiskohtia ja sanattoman viestinnän tulkitseminen voi olla haastavaa. Syvällisessä vuorovaikutuksen tarkastelussa ei-kielellinen viestintä tulisi kuitenkin ottaa huomioon. (Uusikylä 1979, 87–89.)

Opetustilanteiden vuorovaikutus tapahtuu monin tavoin, jolloin muodostuu joukko erilaisia **opetusmuotoja**. Luokittelun perusteena on, miten vastuu jakautuu opettajan ja oppilaiden välillä. Oppilaiden tulisi saada säännöllisesti kokemuksia erilaisista opetustavoista, ja vähitellen taitojen karttuessa oppilaiden vastuun määrää voidaan kasvattaa. Koskenniemi jakaa opetustavat kolmeen pääryhmään:

1. Opettajakeskeiset muodot: opettaja panee työn alulle ja ohjaa sitä. Opettajakeskeisiä tapoja ovat opettajan esitys, opettajan kysely ja yhteinen harjoitus, esimerkiksi tehtäväkirjojen täyttö.
2. Oppilaskeskeiset muodot: työn eteneminen ja joskus myös sen suunnittelu ovat oppilaiden vastuulla. Oppilaskeskeisiä muotoja ovat yksilöllinen työskentely, oppilaiden esitys ja ryhmätyö.
3. Yhteistoiminnalliset muodot: työnjako on yhteinen, eikä vastuunjakoa määritellä selvästi. Yhteistoiminnallisia muotoja ovat opetuskeskustelu ja juhla. (Koskenniemi & Hälinen 1970, 134–139; Koskenniemi 1982, 127.)

Yksilöllisen työn ja yhteisen harjoituksen erottaminen ei ole aina selkeää. Keskeistä on, kenellä on vastuu tehtävästä. Jos oppilaan työskentely on yksilöllistä, hän opiskelee itsenäisesti usein itse valitsemiensa tehtävien mukaisesti. Opettajakeskeisessä yhteisessä harjoituksessa oppilaat tekevät tehtäviä yhteisesti, mutta työn ohjaus- ja kontrollointivastuu kuuluu opettajalle. Opetuskeskustelussa opettaja ja oppilaat osallistuvat yhdessä tasavertaisina keskusteluun jo aiheenvalinnasta lähtien. Keskustelussa harjoitellaan kuuntelemaan muita ja esittämään mielipiteitä perusteluineen. Pelkästään opettajajohtoinen ja auktoriteettisidonnainen opetus ei kannusta oppilaita kasvamaan oma-aloitteisiksi, aktiivisiksi ja kriittisiksi. (Uusikylä & Atjonen 2005, 121,125.) Koskenniemi (1982, 134) huomauttaa, että ryhmätyötä käyttävät lapsikeskeisiä työtapoja tärkeänä pitävien opettajien lisäksi myös sellaiset opettajat, jotka pitävät ryhmätyötä keinona vapautua koko luokan työskentelyn ohjaamisen vaivasta.

Opiskelutilanne voi muodostua yksilökeskeiseksi, kilpailulliseksi tai yhteistoiminnalliseksi ja muokata näin luokan ilmapiiriä ja oppilaiden keskinäisiä suhteita. Yksilökeskeisessä opiskelussa yksittäisen oppilaan oma etu ja eteneminen korostuvat. Yksilöiden välillä voi vallita myös kilpailua, jolla voi olla sekä positiivisia, että negatiivisia seurauksia. Kilpailutilanteessa oppilas saattaakin asettaa itselleen korkeampia tavoitteita kuin yhteistoiminnallisessa ryhmässä, ja tehostaa näin oppimistaan. Yhteistoiminnallisen ryhmän jäsenet sopivat yhteisistä tavoitteista, pyrkivät yhdessä niiden saavuttamiseen ja sitoutuvat yhteiseen työhön. Opettajan on opastettava oppilaita vuorovaikutteisessa ryhmässä toimimiseen, jotta yhteistoiminnallisuus toteutuisi luokassa. Opiskelutilanne saattaa näkyä myös fyysisesti luokkahuoneessa: esimerkiksi erilliset pulpettijonot saattavat kuvata opiskelun ilmapiiriä. (Aho 1997, 30–32.)

4 Tutkimustehtävä ja tutkimuskysymykset

Tutkielmani tutkimustehtävänä on kuvata, analysoida ja tulkita, miten luokanopettajat opettavat matemaattista ongelmanratkaisua ja ohjaavat oppilaiden ratkaisuprosesseja. Otan tarkastelun kohteeksi opettajan ja oppilaiden välisen luokkahuonekeskustelun matematiikan ongelmanratkaisutuntien aikana. Lähestyn ongelmanratkaisun opettamista erityisesti opettajan puheen kautta. Tutkielmani tavoitteena on muodostaa kuvaus siitä, millä tavoin opettajat ohjaavat oppilaiden ongelmanratkaisua. Pyrin myös selvittämään, millaisten kysymysten avulla oppilaat hakevat opettajan ohjausta. Lisäksi tarkastelen oppituntien keskustelua matemaattisen ongelmanratkaisuprosessin kannalta: mihin ongelmanratkaisuprosessimallien (esim. Mason, Burton & Stacey 1982; Pólya 1945; Schoenfeld 1985; Hähkiöniemi, Leppäaho & Francisco, painossa) vaiheisiin opetus ja ohjaus kohdistuvat. Lisäksi tavoitteenani on selvittää, millaisia ongelmanratkaisustrategioita (esim. LeBlanc 1977) opettajat ja oppilaat tuovat esiin oppituntien aikana. Lähestyn tutkimustehtävääni kahden tutkimuskysymyksen kautta. Ensimmäinen näistä jakautuu kahteen alakysymykseen ja jälkimmäinen kolmeen:

1. Miten luokanopettajat opettavat ongelmanratkaisua?
- Mihin ongelmanratkaisuprosessin vaiheisiin tuntien ohjaus liittyy?
- Millaisia ongelmanratkaisustrategioita luokanopettajat tuovat opetuksessaan esiin?

2. Millaista oppituntien luokkahuonekeskustelu on?
- Millaista ohjausta opettajat antavat oppilaille?
- Millaisia kysymyksiä opettajat esittävät?
- Millaisia neuvoja oppilaat pyytävät opettajalta?

Tutkielman aineistoksi valitsin ongelmanratkaisutunneilla kuvatut videot, joissa opettajan puheen tallentuminen on varmistettu mikrofonin avulla. Lähestyn tutkimuskysymyksiäni analysoimalla ja tulkitsemalla tuntien vuorovaikutusta kiinnittämällä huomiota erityisesti opettajan puheeseen.

5 Tutkimuksen toteutus

Laadullisen tutkimuksen aineistoa tarkastellaan usein kokonaisuutena (Alasuutari 2011, 38). Tutkimukseni lähtökohta on laadullinen, joten pyrinkin kuvaamaan ongelmanratkaisun opettamista mahdollisimman kokonaisvaltaisesti (Hirsjärvi, Remes & Sajavaara 1997, 161). Ominaista laadulliselle tutkimukselle on, ettei tutkimusaineistoa kerätä tietyissä tilanteissa, vaan aineisto koostuu dokumentoiduista tilanteista (Alasuutari 2011, 85), tässä tutkielmassa videoiduista oppitunneista.

Asetelmaltaan tutkimukseni on tapaustutkimus, jonka tavoitteena on kuvailla kattavasti matemaattisen ongelmanratkaisun opettamista kahdeksan luokanopettajan pitämillä oppitunneilla. Tapaustutkimukselle tyypillisiä piirteitä ovatkin yksityiskohtaisen tiedon hankkiminen pienestä joukosta sekä prosessin nostaminen kiinnostuksen kohteeksi. Tavoitteena voidaan tyypillisesti pitää ilmiöiden kuvailua. (Hirsjärvi ym. 1997, 134–135.) Tarkoituksenani on saada mahdollisimman kattava kuva siitä, miten ongelmanratkaisun opettaminen ilmenee opettajan ja oppilaiden välisessä vuorovaikutuksessa. Tapaustutkimuksen avulla voidaan tarkastella ilmiöitä arkielämän kontekstissa (Yin 1994, 13; Hirsjärvi ym. 1997, 145), tässä tutkielmassa matematiikan oppitunneilla.

Tutkielmani aineiston muodostavat videolle tallennetut ja litteroidut kolmannen luokan matematiikan oppitunnit, joiden aiheena on avoimen ongelmanratkaisutehtävän käsittely. Tarkastelen oppitunneilla tapahtuvaa opettajan ja oppilaiden välistä luokkahuonekeskustelua sisällönanalyysin kautta.

5.1 Luokkahuonekeskustelun tutkiminen

Tutkimuksen avulla on selvitetty, millaisia kielellisiä käytäntöjä opettajat ja oppilaat käyttävät luokkahuoneessa. Opetusdiskurssi on ollut tutkimuksen kohteena erityisesti 1960-luvulta lähtien, jolloin selvitettiin esimerkiksi luokkahuonevuorovaikutuksen säännönmukaisuuksia. (Lindroos 1997, 2; Kovalainen & Kumpulainen 2009, 43.) Tutkimuksen määrän lisääntyessä kiinnostuksen kohteeksi nousivat luonnolliset opetustilanteet sekä opettajan ja oppilaan välinen vuorovaikutusprosessi kokonaisuudessaan. Observointi nousi keskeiseksi aineiston koonnin menetelmäksi, kun tutkimuksen kohteeksi valittiin luokkahuoneen ilmapiiri sekä opetus-oppimisprosessin säännönmukaisuuksien tarkastelu. (Heinilä 2002, 26). Opetustapahtumatutkimuksessa opetus määritellään yleensä opettajan ja oppilaan vuorovaikutukseksi, eikä tutkimukseen kohteeksi yleensä nosteta oppimista ja opetuksen tuloksia (Leiwo ym. 1987a, 1). Klassisina tutkimuksina voidaan pitää esimerkiksi Ned A. Flandersin (1970) ja Arno A. Bellacin (1966) julkaisuja. Luokkahuoneen vuorovaikutuksen tutkimuksessa on etukäteen laadittujen luokitusten rinnalle nostettu myös laadullisempi lähestymistapa, jonka perustana ovat esimerkiksi lingvistinen, fenomenologinen ja antropologinen traditio (Evaldsson, Lindblad, Sahlström & Bergqvist 2001, 18).

Usein luokkahuonekeskustelua lähestytään kielenkäytön näkökulmasta. Vuorovaikutusta on tutkittu runsaasti esimerkiksi keskustelunanalyysin menetelmin. Keskustelunanalyysin lähtökohtana toimivat aidot keskustelutilanteet (Hakulinen 1997, 15; Seedhouse 2004, 15), esimerkiksi luokkahuonekeskustelut. Keskustelunanalyysin avulla pyritään selvittämään, mitä kaikkea puheenvuoroilla saadaan aikaiseksi: esimerkiksi miten osoitetaan, että keskustelussa kumppanin esittämä asia on uutta tai tuttua tietoa tai että puheenaihe on vaikea tai arkaluontoinen. Tutkimussuuntaus korostaa kielenkäytön formaalista puolta: sitä, mitä sanotaan ei voida irrottaa siitä, miten se sanotaan. (Hakulinen 1997, 15.) Esimerkiksi Kovalainen ja Kumpulainen (2009) lähestyvät tutkimuksessaan matematiikan ongelmanratkaisutuokioiden sosiolingvistisestä näkökulmasta. He tutkivat opettajan ja oppilaiden kommunikaation käytänteitä sekä diskurssirooleja tilanteissa, joissa koko luokka ratkoo matemaattisia ongelmia. Tutkimuksessa analysoidaan videoitujen kolmannen luokan oppituokioiden vuorovaikutuksen siirtoja, niiden funktioita ja ketjuttumista. (Kovalainen & Kumpulainen 2009, 43–52.)

Tässä tutkielmassa lähestyn oppituntien kommunikaatiota kuitenkin nimenomaan ongelmanratkaisun opettamisen näkökulmasta. Keskeistä tässä tutkielmassa ei ole ilmaisun täsmällinen kielellinen muoto, vaan puheenvuoron sisältö sekä yhteys matemaattisen ongelmanratkaisuprosessin malleihin ja strategioihin. Kun tutkimuksessa mielenkiinnon kohteeksi nostetaan kielen piirteet ja kommunikaatio, erityisesti ilmaisujen sisällön näkökulmasta, lähestymistavaksi voidaan valita sisällönanalyysi (Hirsjärvi ym. 1997, 166). Tästä syystä lähestynkin tutkimuskysymyksiäni tarkastelemalla luokkahuonekeskustelua sisällönanalyysin kautta keskittymättä ilmausten kielelliseen muotoon.

5.2 Aineiston hankinta

Tutkielmani aineisto on osa laajempaa matemaattiseen ongelmanratkaisuun liittyvää seurantatutkimusta, joka on myös yhteistyöprojekti Chilen kanssa. Projektiin osallistuvissa kolmansissa luokissa ratkotaan ongelmatehtäviä keskimäärin kerran kuukaudessa. Oma aineistoni on kerätty Suur-Helsingin alueella syyskuussa 2011. Sain tutkielmani aineistoksi käyttöön videoituja ja litteroituja kolmannen luokan matematiikan oppitunteja, joiden aiheena on etanan etenemiseen liittyvä avoin ongelmanratkaisutehtävä. Tehtävänanto sisälsi saman tehtävän myös espanjankielisenä.

> Etana Elli kiipeää muuria ylös hyvin hitaasti. Joinakin päivinä se nousee kymmenen senttimetriä, joinakin päivinä kaksikymmentä senttimetriä, joinakin päivinä se nukkuu eikä liiku ja toisina päivinä se on syvässä unessa, jolloin se laskeutuu kymmenen senttimetriä. Muuri on sata senttimetriä korkea. Kymmenennen päivän lopuksi Elli on puolivälissä muurin korkeutta eli noussut viisikymmentä senttimetriä. Mitä on voinut tapahtua kymmenenä ensimmäisenä päivänä? Kuvaile niin monta erilaista tapaa kuin mahdollista.

Kiinnostus oppituntien havainnointiin heräsi kandidaatin tutkielman tekemisen myötä, ja suunnittelinkin aluksi havainnoivani luokassa tai videoivani oppitunteja itse. Meneillään oleva ongelmanratkaisuopetuksen tutkimus mahdollisti kuitenkin sen, että sain käyttööni videomateriaalia useilta oppitunneilta, joissa kaikissa käsiteltävä tehtävä on sama. Ei ollut tarkoituksenmukaista videoida oppitunteja itse, sillä käytettävissä oleva materiaali sopii tutkimustehtävääni. Muiden keräämää aineistoa voidaan kutsua *sekundaariaineistoksi*. Suurten projektien kannalta on vain edullista, jos analysoimattomalle aineistolle löytyy käyttäjiä. Aina uuden aineiston kerääminen ei ole tutkimuksen kannalta tarkoituksenmukaista, eikä tutkielmani arvo riipu siitä, kuka videot on tallentanut. (Hirsjärvi ym. 1997, 186). Laajempaan tutkimukseen osallistuminen luo myös kontekstin omalle tutkielmalleni: samoja opettajia ja oppilaita tutkitaan pitkän ajan kuluessa monen eri menetelmän ja näkökulman kautta. Oppilaiden osaamista selvitetään sekä ennen ongelmanratkaisuprojektia että sen jälkeen.

Tutkittavat opettajat ja luokat on valittu projektiin mukaan jo aikaisemmin. Videoituja oppitunteja on useista tehtävistä. Tutkimusjoukoksi ovat siis valikoituneet projektissa mukana olevat kolmatta luokkaa opettavat luokanopettajat ja heidän oppilaansa. Valitsin analyysin kohteeksi kahdeksan opettajan videoidut ongelmanratkaisutunnit. Kaksi opettajista käsitteli ongelmatehtävää kaksoistunnin ajan.

Aineiston keruun perusmenetelmä on havainnointi, jonka avulla saadaan tietoa siitä, miten ihmiset todella toimivat (Hirsjärvi 1997, 212). Tässä tutkimuksessa havaintojen tekeminen tapahtuu kuitenkin videoidun materiaalin perusteella, sillä en ole itse ollut seuraamassa tutkimuksen aineiston muodostavia oppitunteja. Havainnointi kohdistuu opettajan ja oppilaiden väliseen vuorovaikutukseen, ja oppilaiden välinen vuorovaikutus rajataan analyysin ulkopuolelle. Aineiston muodostavat videot on kuvattu yhdellä videokameralla, ja lisäksi opettajan puhe on tallennettu mikrofonin avulla. Lisäksi tuntien aikana tiettyjen ennalta valittujen oppilaiden toiminta tallennettiin toisen kameran avulla. Aineistoni muodostuu kuitenkin vain ensimmäisenä mainituista videoista. Koska oppilaat työskentelevät kaikilla oppitunneilla pareittain tai pienissä ryhmissä, on luokassa meneillään useita oppilaiden välisiä keskusteluita samanaikaisesti. Kaikkien oppilaiden työskentely ei näy videokameran kuvassa. Opettajan langaton mikrofoni kuitenkin varmistaa sen, että opettajan puhe on tallentunut koko tunnin ajan.

Saturaatiolla tarkoitetaan tilannetta, jossa aineisto alkaa toistaa itseään, eikä tutkimusongelman kannalta uutta tietoa ei enää löydy (Tuomi & Sarajärvi 2009, 87). Kahdeksan opettajan tunneilla tallennettu aineisto vaikutti riittävältä, sillä oppituntien ohjaus ja menetelmät alkoivat toistua samankaltaisina, eikä uusia näkökulmia enää noussut.

Videoiden keskustelu oli myös litteroitu valmiiksi, joten kirjoitettuun muotoon muutettua keskustelua voi analysoida tekstinä. Ennen aineiston varsinaista analyysiä katsoin videot useaan kertaan, korjasin tarvittaessa litteroinnissa tapahtuneet virheet ja tein litteroituun keskusteluun merkintöjä myös sanattomasta viestinnästä ja luokan muusta toiminnasta, jonka katsoin vaikuttavan puheenvuoron tulkintaan. Lisäsin merkintöjä esimerkiksi siitä, suuntaako opettaja puheensa koko luokalle vai yksittäiselle oppilaalle. Videoita seuraamalla varmistuin myös litteroinnin laadukkuudesta ja tarkkuudesta. Näin saatua kirjoitetuksi tekstiksi muodostettua keskustelua analysoin sisällönanalyysin keinoin.

5.3 Aineiston analyysi

Sisällönanalyysi on perusanalyysimenetelmä, jonka käyttäminen on mahdollista kaikissa laadullisen tutkimuksen perinteissä. Sen avulla pyritään saamaan tutkittavasta ilmiöstä kuvaus tiivistetyssä ja yleisessä muodossa. Sisällönanalyysi sopii strukturoimattomankin aineiston analyysiin. (Tuomi & Sarajärvi 2009, 91,103.) Lähestymistapa sopii aineistooni, sillä videoitujen oppituntien keskustelu on melko strukturoimatonta. Jokaisella tunnilla oppilaat ratkoivat tehtäviä yhdessä parin kanssa tai pienissä ryhmissä, ja ongelmanratkaisutunneilla oli samanaikaisesti meneillään useita keskusteluja, joihin opettaja osallistui kierrellessään luokassa.

Lähestyin tutkielmassani ongelmanratkaisun opettamista aineistolähtöisesti. Aineistolähtöisen analyysin tavoitteena on muodostaa tutkimusaineistosta teoreettinen kokonaisuus. Analyysiyksiköt, tässä tutkielmassa puheenvuorot tai niiden osat, valitaan aineistosta tehtävänasettelun mukaisesti. Keskeisenä erona teorialähtöiseen analyysiin on se, etteivät analyysiyksiköt ole etukäteen sovittuja. (Tuomi & Sarajärvi 2009, 95–98.) Aineistolähtöisyys ilmenee opetuksen kuvailussa siten, että en ole muodostanut valmiiksi minkäänlaista mallia siitä, miten opettajat opettavat ongelmanratkaisua, vaan tutkimuskysymyksiin liittyvät puheenvuorot nousevat aineistosta. Teoreettinen tietämys ongelmanratkaisuprosessista auttoi minua kuitenkin tunnistamaan ongelmanratkaisuprosessin vaiheita ja esimerkiksi erilaisia ongelmanratkaisustrategioita.

Aineiston pelkistämisessä aineistosta karsitaan tutkimukselle epäolennainen pois. Tutkimustehtävä ohjaa pelkistämistä. (Tuomi & Sarajärvi 2009, 109.) Aineiston tarkastelussa kiinnitetään huomio vain siihen, mikä on olennaista teoreettisen viitekehyksen ja kysymyksenasettelun kannalta (Alasuutari 2011, 40). Ennen analyysin aloittamista on määriteltävä myös analyysiyksikkö (Tuomi & Sarajärvi 2009, 109). Tutkielmani aineiston pelkistämisessä puheenvuoroista karsittiin omiin luokkiinsa oppilaiden välinen puhe ja sellaiset opettajan ja oppilaiden ilmaukset, jotka eivät suoraan kuulu ongelmanratkaisun opettamiseen. Nämä luokat jäivät varsinaisen analyysin ulkopuolelle. Valitsin tutkielmani analyysiyksiköksi keskustelussa esiintyvät puheenvuorot, jotka sisältävät yhden ajatuksen tai päämäärän. Ne voivat olla yksittäisiä sanoja tai lauseita. Keskeistä on kuitenkin se, että analyysiyksikkö sisältää yhden tutkimuksen kannalta keskeisen ilmauksen tai ajatuksen.

Aineiston ryhmittelyssä samaa asiaa tarkoittavat ilmaukset ryhmitellään ja yhdistetään luokaksi sekä nimetään luokan sisältöä kuvaavalla käsitteellä. Luokittelu tiivistää aineistoa, sillä yksittäiset tekijät sisällytetään yleisempiin käsitteisiin. (Tuomi & Sarajärvi 2009, 110.) Koska oppituntien keskustelu on sellaisenaan melko strukturoimatonta ja puheenvuoroja on paljon, käytin luokittelun alustavana runkona Leiwon ym. (1987a: 1987b) tutkimuksessaan luomaa ilmausten sisällön perusteella tehtävää luokitusta. Leiwo, Kuusinen, Nykänen ja Pöyhönen (1987) ovat tutkimuksessaan kehittäneet opetus- ja ryhmäkeskustelujen kuvausjärjestelmät. Tutkimusaineisto koostui 24 videoidusta oppitunnista. Aineistoon ei kuitenkaan kuulunut matematiikan tunteja. Opetusvuorovaikutuksen ilmaukset luokitellaan 53 sisältöluokkaan ilmauksen laadun mukaan. Nämä sisältöluokat puolestaan muodostavat kahdeksan yläluokkaa: tietoa esittävät, tietoa jaksottavat, kysyvät, vastaavat, kommentoivat, toimintaa säätelevät, arvioivat sekä muut ilmaukset. (Leiwo ym. 1987a.) Puheenvuorojoen ryhmittely oli tutkielmassani aineistolähtöistä, mutta edellä mainittu malli loi pohjan mahdollisille luokille. Lopullinen luokittelu ei kuitenkaan noudattanut Leiwon ym. luokitusjärjestelmää. Alustavan luokittelun jälkeen tutkielmani aineisto järjesteltiin luokituksen mukaisesti. Tässä vaiheessa arvioin luokittelun onnistumista yhdistelemällä ja täsmentämällä muodostuneita alaluokkia (Hirsjärvi & Hurme 1998, 149).

Ryhmittelyä seuraa aineiston käsitteellistäminen. Käsitteellistämisvaiheessa edetään luokituksia yhdistelemällä kohti teoreettisia käsitteitä ja johtopäätöksiä.

(Tuomi & Sarajärvi 2009, 111.) Tässä analyysin vaiheessa tarkoituksena oli yhdistää ongelmanratkaisun opettamista kuvaavia ilmauksia yläluokkiin, pääluokkiin ja edelleen yhdistäviin luokkiin. Tavoitteena oli muodostaa kuvaus siitä, miten matemaattista ongelmanratkaisua opetetaan aineiston muodostavilla oppitunneilla. Tutkimuksen aineisto liitetään teoreettisiin käsitteisiin ja tulososiossa pyritään esittämään empiirisestä aineistosta rakennettu malli, käsitejärjestelmä, käsitteet tai aineistoa kuvaavat teemat. Tuloksissa esitetään luokittelujen pohjalta muodostetut käsitteet tai kategoriat sisältöineen. (mts. 112–113.) Taulukossa 2 esitetään esimerkkejä aineiston ryhmittelystä ja käsitteellistämisestä.

Taulukko 2 Aineiston analyysi

Alkuperäinen ilmaus	**Pelkistetty ilmaus**	**Alaluokka**	**Yläluokka**	**Pääluokka**
Onks se voinut liikkua joinain päivinä kymmenen ja joinain kakskyt?	Miten etana voi liikkua?	Kysymys tehtävänannon tiedoista	Tehtävän ymmärtämiseen ja tekemiseen liittyvät kysymykset	Oppilaan tekemät kysymykset
Sit jos tuntuu, että tota auttaa se, että piirtää niin siihen paperiin voi myös piirtää…	Kuvan tekeminen	Piirtäminen strategiana	Ongelmanratkaisustrategiat	Ongelmanratkaisun opettaminen

Tuomi ja Sarajärvi (2009) korostavat, että sisällönanalyysin tekijän on rajattava selvästi, mistä asioista on kiinnostunut ja kuvattava ne mahdollisimman tarkasti. Muut mielenkiintoiset aineistosta nousevat teemat on jätettävä myöhemmän tutkimuksen kohteeksi. Tässä tutkielmassa keskityttiin tarkastelemaan luokkahuoneen vuorovaikutusta erityisesti ongelmanratkaisun opettamisen näkökulmasta. Tästä syystä sisällönanalyysi rajoittui opettajan ja oppilaiden väliseen keskusteluun. Esimerkiksi oppilaiden välinen vuorovaikutus parityöskentelyn aikana jäi analyysin ulkopuolelle.

6 Tutkimustulokset ja niiden tulkintaa

Tässä luvussa kuvailen, miten opettajat ohjasivat oppilaiden ongelmanratkaisua matematiikan tunneilla. Olen jaotellut tutkimukseni tulokset viiteen osioon: opettaja ongelmanratkaisuprosessin ohjaajana, ongelmanratkaisustrategiat, opettajat kysymykset, oppilaiden kysymykset sekä opettaja kuuntelijana ja palautteen antajana. Olen liittänyt tulkintojeni tueksi suoria sitaatteja aineistosta. Esittelen aluksi lyhyesti tutkielmaan valittujen oppituntien kulun. Seitsemän opettajista on naisia ja yksi mies. Opettajien tunnistamisen estämiseksi heidän nimensä on muutettu. Tästä syystä miesopettajakin esiintyy tutkimuksessani naisen nimellä.

Matematiikan tunnin alussa Katja johdattelee oppilaat aiheeseen ja jakaa heidät kuuteen työskentelypariin tai kolmikkoon. Hän lukee tehtävän kerran läpi ja kannustaa oppilaita keksimään mahdollisimman monta ratkaisua. Oppilaat ratkovat tehtävää itsenäisesti ja keskustelua syntyy melko vähän, pääasiassa vain kahdessa ryhmässä. Katja seuraa työskentelyä kauempaa ja kertookin kuvaamassa olleelle tutkijalle ottavansa tietoisesti hiljaisen roolin. Tunnin edetessä Katja kommentoi luokan hiljaisuutta ja kannustaa oppilaita pohtimaan ja keskustelemaan yhdessä. Hän myös näyttää tunnin aikana dokumenttikameralla kuvan muurista selittämättä sitä sen enempää. Katja alkaa kierrellä luokassa auttamassa ja seuraamassa oppilaiden työskentelyä. Valmiiden ratkaisujen käsittely ei tallennu videolle, sillä oppilaat lähtevät ruokailuun.

Pia jakaa kaksoistunnin aluksi oppilaat pareiksi tai kolmen ryhmiksi. Tehtävä luetaan itsekseen ja ääneen. Oppilaat lähtevät ratkomaan tehtävää parin kanssa keskustellen ja kirjoittavat ratkaisuehdotuksia lomakkeelle. Käytössä on kuva muurista, jota pitkin etana kiipeää. Pia lähtee heti alkutunnista kiertämään luokassa neuvomassa. Oppilaat esittävät kysymyksiä kiertelyn aikana. He selvittävät opettajalta epäselviä asioita ja haluavat myös kertoa omia vastauksiaan. Ruokailun jälkeen alkavalla tunnilla oppilaat miettivät vielä hetken ratkaisujaan ja jokainen ryhmä lukee ääneen yhden vastauksistaan. Lopuksi opettaja johdattelee oppiaita pohtimaan, millaisia ajatuksia tehtävän ratkaiseminen herätti ja kuinka paljon oikeita vastauksia on olemassa.

Helenan oppitunnin alussa opettaja ja oppilaat käyvät tarkasti tehtävänannon läpi osa kerrallaan. Tehtävän tiedot kirjoitetaan taululle näkyviin. Helena varmistaa vielä kysymyksien avulla, ovatko oppilaat ymmärtäneet, mitä tehtävässä pitäisi tehdä. Opettaja ohjeistaa oppilaita myös viivadiagrammin tekemiseen. Tämän jälkeen oppilaat siirtyvät parin viereen ratkomaan ongelmaa. Helena kiertelee luokassa auttamassa oppilaita alkuun. Hän esimerkiksi tekee yhden parin kanssa tehtävää eteenpäin muutaman askeleen verran, jolloin oppilaat tajuavat tehtävän idean. Työskentelyn aikana opettaja vastailee ongelmaa koskeviin pohdintoihin. Helena käy myös kommentoimassa vastauksia ja kiinnittämässä oppilaiden huomion virheisiin.

Ritvan oppitunnin alussa oppilaat yrittävät keksiä arvausleikin avulla, mikä opettajan ystävä voisi olla. Leikin kautta Ritva johdattelee lapset etanatehtävään, jonka hän lukee ääneen dokumenttikameralta. Ritva vastailee jo tässä vaiheessa oppilaiden kysymyksiin ja selittää ongelman ideaa. Tämän jälkeen hän jakaa oppilaat pareiksi tai kolmen ryhmiksi, jotka työskentelevät sekä luokkatilassa että läheisessä aulassa. Osa luokkaan jääneistä oppilaista alkaa heti keskustella tehtävästä ja työskennellä yhdessä, toiset puolestaan keskittyvät aiheeseen liittymättömään puuhailuun. Kierrellessään luokassa ja aulassa Ritva kiinnittää huomiota erityisesti siihen, miten oppilaat ovat ratkaisunsa merkinneet. Hän neuvoo oppilaita käyttämään jonkinlaisia merkkejä tai symboleja ratkaisuissaan. Lopputunnista oppilaat esittelevät vastauksiaan dokumenttikameralla ja tarkistavat niitä laskimilla.

Tunnin alussa Sofia kertoo, että ongelmatehtävä kehittää matemaattista ajattelua ja mainitsee lyhyesti tutkimusprojektista. Hän motivoi oppilaat tutustumaan tehtävään esittelemällä ensin vain espanjankielisen tehtävänannon. Tämän jälkeen suomenkielinen tehtävä luetaan läpi lause kerrallaan ja opettaja poimii oppilaiden kanssa etanan liikkumista koskevat säännöt ylös. Muurin kuvaa opettaja ei näytä. Sofia ohjaa pareja ja ryhmiä keskustelemaan ensin hetken siitä, miten tehtävää voisi lähteä ratkaisemaan. Hän tiedustelee oppilailta, tarvitsevatko he tässä tehtävässä muistiinpanovälineitä. Keskustelu parin kanssa käynnistyy heti ja opettaja kiertää luokassa seuraamassa työskentelyä. Sofia haastaa pareja pohtimaan, mitä tapahtuisi, jos etana nouseekin viidenkymmenen senttimetrin yli aivan muurin huipulle asti. Lopuksi oppilaat esittelevät vastauksensa dokumenttikameralla.

Tunnin alussa Tiina esittelee oppilaille espanjankielisen tehtävän ja haastaa heitä pohtimaan, mitä voi tehdä, kun ongelmana on vieraskielinen teksti. Lisäksi Tiina pyytää oppilaita määrittelemään, mitä sana ongelma tarkoittaa. Seuraavaksi oppilas lukee suomenkielisen tehtävänannon, jossa on näkyvillä myös kuva muurista. Tehtävänannon kertaamisen jälkeen oppilaat lähtevät ratkaisemaan ongelmaa parin kanssa tai kolmen ryhmissä. Tiina kiertää auttamassa niitä ryhmiä, jotka eivät pääse tehtävässä alkuun. Opettaja varmistaa kysymyksillään, että oppilaat löytävät tehtävänannosta olennaiset asiat. Tiina kehottaa ratkaisun löytäneitä oppilaita muokkaamaan valmista vastausta uuden ratkaisun löytämiseksi. Oppilaat ratkovat tehtävää eri tavoin: osa tekee laskun, osa miettii tehtävää päivä kerrallaan ja toiset piirtävät kuvan. Ratkaisujen esittelyn aikana Tiina pyytää vielä oppilaita selittämään, miten he pääsivät ensimmäisestä ratkaisusta toiseen. Hän piti tunnin aikana tärkeänä, että oppilaat ymmärsivät ratkaisujen syntyvän lukujen paikkoja vaihtamalla.

Hannele aloittaa tunnin palauttamalla oppilaiden mieliin edellisen ongelmanratkaisutunnin tehtävän. Hän lukee uuden ongelman ääneen ja käy kysellen läpi muuriin merkityt tiedot päivistä ja senttimetreistä. Myös oppilaat kyselevät tehtävästä aktiivisesti. Kierrellessään luokassa Hannele auttaa oppilaita tulkitsemaan muurin kuvaa ja piirtämään ratkaisujaan. Oppilaat työskentelevät aktiivisesti pareissa tai pienissä ryhmissä. Hannele käy tunnin aikana kaksi kertaa monistamassa oppilaille lisää vastauslomakkeita ja oppilaat odottavat malttamattomina. Oppilaat laskevat ja vertailevat, kuka on saanut eniten vastauspapereita täytettyä. Valmiiden ratkaisujen tarkastelu jää seuraavaan kertaan.

Outin oppilaat pohtivat tehtävää kaksoistunnin ajan. Oppitunnilla on paikalla pieni ryhmä, vain 6 oppilasta. Aiheeseen johdattelun jälkeen oppilaat lukevat tehtävän hiljaa itsekseen ja lähtevät sen jälkeen pohtimaan ratkaisua. Tehtävää ei käydä yhteisesti läpi tunnin alussa. Oppilaat ratkovat ongelmaa keskustellen kahdessa ryhmässä. Kun oppituntia on kulunut noin viisitoista minuuttia, Outi korostaa tehtävänannon tekstistä etanan liikkumismahdollisuudet. Outi kannustaa oppilaita aktiivisesti käyttämään ratkaisun apuna viivainta ja erimittaisia laskusauvoja. Opettaja käy vuorotellen auttamassa molempia oppilasryhmiä. Välitunnin jälkeen oppilaat aloittavat ratkaisun kokonaan alusta puhtaalle paperille. Oppilaat keskustelevat yhdessä, mutta jokainen tekee omaa ratkaisuaan. Loputunnista oppilaat näyttävät omat ratkaisunsa dokumenttikameralla ja selittävät, mitä ratkaisussa tapahtuu ja miten he ovat tulokseen päätyneet. Oppilaiden ratkaisut eroavat toisistaan, ja vastaukseen on päästy esimerkiksi piirtämällä ja laskemalla välituloksia. Outi kiinnittää oppilaiden huomion siihen, miten erilaisten tapojen avulla vastaus voidaan löytää. Hän pyytää oppilaita ehdottamaan parasta ratkaisutapaa tähän ongelmaan.

6.1 Opettajan ongelmanratkaisuprosessin ohjaajana

Jokaisen oppitunnin alussa opettajat motivoivat ja johdattelivat oppilaita käsiteltävään aiheeseen. Ritvan oppilaat arvuuttelivat opettajan ystävää, Sofia kertoi oppilailleen ongelmanratkaisutuntien kehittävän matemaattista ajattelua ja Tiina asetti oppilaille ongelman espanjankielisen tehtävänannon muodossa sekä pyysi määritelmää ongelmalle. Oman määritelmänsä hän asetti seuraavalla tavalla:

> ”Ongelma voi olla se, että ei löydä vaikka aamulla toista sukkaansa. Siihen pitää löytää joku keino, että millä mä selviän. Tai sitten on ongelma jonkun kotiläksyn kanssa, on ongelma kenen kanssa leikkii iltapäivällä. On ongelma mitä syö aamulla aamupalaksi. Ne on kaikki erilaisia ongelmia. Niihin osaan löytyy ratkaisuja, voi olla että joku jää ratkaisematta. Jos vaikka hävität jonkun tavaran, etkä löydä sitä, se on aikamoinen ongelma.” (Tiina)

Suuri osa opettajien neuvoista ja ohjeista tuntien aikana kohdistui ongelman ja tehtävänannon ymmärtämiseen. Useat oppitunnin aikana annetuista neuvoista kertasivatkin tehtävänannon tietoja. Tehtävää luettiin hiljaa itsekseen ja ääneen, tehtävän tiedot koottiin taululle ja joissakin luokissa tarkasteltiin kuvaa Elli etanan muurista. Esimerkiksi Helena kävi oppilaidensa kanssa tehtävän tarkasti läpi lause lauseelta ja samalla hän kertasi myös viivadiagrammin piirtämisen. Sofia puolestaan poimii oppilaiden kanssa tehtävänannon tiedot näkyville. Ritva asetti oppilailleen tavoitteeksi etsiä ongelmaan kaksi tai kolme erilaista ratkaisua. Katja, Pia, Tiina ja Outi ohjasivat kuitenkin oppilaat heti tehtävän lukemisen jälkeen ratkaisemaan ongelmaa käymättä tehtävänantoa tarkasti läpi.

> ”Katsotaan vielä yhdessä osasina, että mitä se Elli etana hommaa siellä, kun se tekee kaikkea kummallista. Ainakin kaikki saivat selville sen, että mitä se Elli etana on tekemässä yleensä, koko siinä jutussa ja koko tänä aikana.” (Helena)

> ”Ja täs lukee et kuvaile niin monta erilaista tapaa kuin mahdollista, niin tota mä sanoisin et meille vois riittää kaks tai kolme. Lähetään siit kahesta.” (Ritva)

Ongelmanratkaisuprosessin alkuvaihe, ymmärtäminen (Pólya 1945), sisäänpääsyvaihe (Mason 1982), analyysivaihe (Schoenfeld 1985) tai ongelman rajaaminen (Hähkiöniemi ym.) näkyi opettajien ohjauksessa siten, että osa opettajista kävi tehtävänantoa yhdessä oppilaiden kanssa tarkasti läpi heti tunnin alussa. Tehtävän ratkomisen käynnistyessä ja oppilaiden kohdatessa hankaluuksia ratkaisuyrityksessään opettajat ohjasivat lukemaan tehtävää uudelleen ja kiinnittämään huomiota siihen, millaisia ehtoja tehtävässä kerrotaan. Kaksi opettajista kiinnitti oppilaiden huomion myös jonkinlaisen ratkaisusuunnitelman laatimiseen. Outi ja Sofia ohjasivat oppilaat heti tehtävän lukemisen jälkeen pohtimaan ryhmän kanssa, miten tehtävää voisi lähteä ratkaisemaan. Muilla oppitunneilla ongelman ratkaisemista ei suunniteltu millään tavalla etukäteen, vaan oppilaat lähtivät suoraan tehtävään tutustumisen jälkeen keksimään ratkaisuja.

> ” Mieti ensin miten sä lähdet ratkaisemaan. Millä tavalla?” (Outi)

> ”Ja nyt lähtekää miettimää, että miten te lähtisitte tätä ratkasemaan… Eli käykää pieni porina sen parin kanssa, miten lähtisitte tätä ratkasemaan.” (Sofia)

Jokaisella oppitunnilla oppilaita kannustettiin keskustelemaan ja ratkomaan ongelmaa yhdessä parin kanssa. Oppilaiden pohtiessa ongelmaa tutustumisvaiheen jälkeen opettajat kiertelivät luokassa auttamassa. Merkittävä osa ohjeista ja neuvoista liittyi tehtävänannon tietoihin. Opettajat myös auttoivat oppilaita huomaamaan ratkaisuissa tapahtuneet virheet. Välillä he neuvoivat yhden oppilaan lisäksi koko luokkaa ryhmätyöskentelyn aikana, esimerkiksi silloin, kun samantyyppiset virheet ja väärinkäsitykset toistuivat oppilaiden vastauksissa.

> ”Hei nyt täytyy ottaa toinen kuunteluvaihe. Nyt olen löytänyt kolmesta... kuuntele… kolmesta paperista huijausta ja… ” (Helena)

Varsinaisessa ratkaisuvaiheessa opettajat kohdistivat ohjaustaan myös strategioiden käyttöön ja vastauksen merkitsemistapaan. Esimerkiksi Outi ohjasi oppilaitaan kokeilemaan ratkaisukeinona viidenkymmenen senttimetrin rakentamista eriväristen laskusauvojen avulla. Ritva puolestaan halusi auttaa oppilaita kehittämään valitsemaansa merkitsemistapaa selkeäksi ja helposti ymmärrettäväksi. Lähes kaikki opettajat auttoivat oppilaita pääsemään ratkaisussa alkuun tekemällä oppilaan kanssa malliksi etana Ellin reittiä päivä kerrallaan.

> ”Kymmenen vai kakskyt eka päivä?” (Hannele)
> ”Kakskyt.” (oppilas)
> ”Kakskyt eli minne se menee?” (Hannele)
> ”Tossa” (oppilas)
> ”Elikkä tuossa noin, eiks ni? Tehään eka nää pisteet ja vedetään sit vast ne viivat. Paljos toisena päivänä?” (Hannele)

Oppilaat pääsivät ongelmanratkaisuprosessin viimeiseen vaiheeseen, ratkaisun tarkasteluun ja tarkistamiseen, keskellä oppituntia sekä joidenkin oppituntien lopuksi opettajan yhteisessä ohjauksessa. Tässä vaiheessa ratkaisija arvioi, voiko ratkaisun tarkistaa tai voiko ratkaisuun päätyä myös toisella tavalla (Pólya 1945, 5–18). Hän on tyytyväinen ratkaisuunsa tai luovuttaa eikä yritä enää löytää vastausta. Ratkaisija käy ehdotuksensa läpi, pohtii keskeisiä ideoita ja pyrkii yleistämään ratkaisuideaa. (Mason ym. 1982, 43–47.) Keksiessään ratkaisun osa oppilaista jatkoi heti uuden vastauksen työstämistä, kun taas toiset pyysivät opettajaa tarkistamaan, että vastaus on oikein. Osa opettajista ohjasi oppilaita tarkasteluvaiheeseen esittämällä kysymyksiä esimerkiksi siitä, voiko valmista ratkaisua hyödyntää toisen ratkaisun löytämiseksi tai voiko ratkaisuun päätyä jollakin toisella tavalla. Tässä vaiheessa opettajat myös kiinnittivät oppilaiden huomion mahdollisiin virheisiin ratkaisuehdotuksissa. Helena ohjasi oppilaita perustelemaan ajatuksiaan ja ideoitaan jo tunnin keskivaiheilla. Tiina kannusti oppilaita selvittämään, muuttuuko ratkaisu toiseksi lukujen paikkaa vaihtamalla. Hän halusi oppilaiden selittävän, miten vastausta muokkaamalla voi päätyä toiseen ratkaisuun. Opettajat kannustivat oppilaita jatkamaan ongelman ratkomista ensimmäisen ratkaisun löytämisen jälkeen.

> ”Kokeile ensin erilaisia mahdollisuuksia ratkaista se… Siihen voi olla joku muukin tapa ratkaista kun tolleen.” (Outi)

”Sul on aika mont päivää. Koitapa miettiä, tässä on mennyt oikein ja täällä. Nyt on tullut vähän liikaa noit päiviä.” (Hannele)

”…miettikää mulle vastaus tähän kysymykseen miksi te teette näin. Se on olennaista tietää oikeesti, et jos keksii jonkun nerokkaan jutun, niin totta kai sitä saa käyttää, mutta silloin on hyvä olla perustelu.” (Helena)

Osalla oppitunneista ratkaisuja tarkasteltiin myös yhteisesti keskustellen tai dokumenttikameraa käyttäen. Esimerkiksi Pia halusi oppilaiden miettivän, keksivätkö he kaikki mahdolliset ratkaisut ongelmaan ja pyysi oppilaita lisäksi kertomaan, jos he jossain vaiheessa tehtävää olivat oivaltaneet jotakin tärkeää. Ritva opasti oppilaita tarkistamaan toisten ratkaisuja laskimella. Outi taas pyysi oppilaita valitsemaan erilaisista ratkaisutavoista parhaan tämän ongelman selvittämiseen.

”Seitsemän vaihtoehtoo, mut luuletsä että siinä oli kaikki mahdolliset?... Kuinka paljon sä luulet, et niit vaihtoehtoja olis?” (Pia)

”Joo, oliks joku täs tehtävän ratkasussa, mikä niinku jossain vaiheessa, kun te aloitte tota tai teitte sitä niin tuli sellanen hei tän voi tehdä myös näin, mitä ei heti alussa huomannut, että siinä on jotain… jotain eri vaihtoehtoja, mitkä jossain vaiheessa tuli sellainen ahaa-elämys, että tän voi tehdä näinkin?” (Pia)

”Mikä oli teistä paras tapa ratkasta tää? Mikä näistä eri tavoista, älkää miettikö omaanne. Mikä oli näistä helpoin tapa ratkaista?” (Outi)

Avoimen ongelmanratkaisuprosessin malliin sisältyy ajatus siitä, että opettaja ohjaa oppilaita siirtymään vaiheesta toiseen (Hähkiöniemi ym. painossa). Opettajat ohjasivat aineistossani oppilaita ongelmanratkaisutuntien aikana siirtymään ratkaisuprosessissaan seuraavaan vaiheeseen, esimerkiksi ratkaisusuunnitelman pohtimiseen, ratkaisuehdotuksen tarkistamiseen tai uuden ratkaisusyklin aloittamiseen. Osalla tunneista tarkasteluvaiheeseen siirryttiin yhdessä, vaikka oppilaiden oma ongelmanratkaisuprosessi olisikin ollut kesken.

”Koittakaapa keksiä nyt toinen ratkaisu, jossa te käytätte näitä lukuja, joita tähän tehtävään on annettu.” (Tiina)

”Noni hyvä, nyt mietit vähän eri tavalla tähän just samalla systeemillä.” (Hannele)

Opettajat auttoivat oppilaita usein myös palaamaan takaisin ongelmanratkaisuprosessin aikaisempiin vaiheisiin. Oppilaat lähtivät usein ratkomaan ongelmaa heti ymmärtämättä tehtävää tai sen asettamia ehtoja kunnolla. Tällöin opettajat ohjasivat oppilaita lukemaan tehtävää uudelleen ja auttoivat ymmärtämään sen antamat rajoitukset ja ehdot. Esimerkiksi Tiinan oppilaat aloittivat ongelman ratkomisen heti tehtävän lukemisen jälkeen, eikä tehtävän tietoja käyty yhteisesti läpi. Tiina kehottikin useita oppilasryhmiä palaamaan takaisin tehtävänantoon, kun ongelman ratkominen ei lähtenytkään sujumaan.

> ”Pitääks sen päästä yli viiteenkymppiin?” (Katjan oppilas)
>
> ”Koitapa vielä kerran lukea se ohjeistus.” (Katja)

Hähkiöniemen ja Leppäahon (2012) mukaan opettajien antamaa ohjausta voidaan tarkastella myös sen tason mukaan. Pintapuolisessa palautteessa opettaja ei huomaa jotakin tärkeää vastauksen osaa tai hänen antamansa palaute ei liity oppilaan ratkaisuun. Tulkintani mukaan opettajien antama ohjaus ja palaute on usein melko pintapuolista. Opettajat kommentoivat oppilaiden vastauksia vain yksisanaisesti, eivätkä varsinaisesti kiinnittäneet huomiota ratkaisuehdotukseen. Joissakin tapauksissa opettajat ymmärsivät oppilaiden ratkaisuehdotukset aluksi väärin.

> ”Joo eli te keksitte ihan uuden tavan. Ette hyödyntäneet tätä mitenkään?... [Oppilas selittää omaa vastaustaan Tiinalle.] …Aaa. Nyt mä ymmärsin… No sillonhan te ootte hyödyntäneet.” (Tiina)

Usein opettajan antama ohjaus rajoitti oppilaan toimintaa, sillä opettaja paljasti kesken ratkaisuprosessin ratkaisun olevan oikein tai väärin ja pyysi oppilasta ratkaisemaan ongelman toisella tavalla motivoimatta siihen erityisesti. Tulkitsin aineistossa esiintyvän myös jonkin verran aktivoivaa ohjausta, joka auttaa oppilasta kiinnittämään huomion keskeisiin asioihin tehtävässä tai ratkaisussa ja ohjaa oppilasta tutkimaan tätä näkökulmaa tai motivoi oppilasta etsimään toista ratkaisua. (Hähkiöniemi & Leppäaho 2012.) Välillä opettajien ohjaus vaikutti aktivoivalta, sillä he esimerkiksi kannustivat ja motivoivat oppilaita pohtimaan aikaisempien ratkaisujen hyödyntämistä tai toisenlaisia ratkaisustrategioita. Monesti opettajat esittivät ehdotuksensa oppilaille haasteen muodossa. Useissa tilanteissa opettajat hyväksyivät oppilaiden itsenäisesti valitseman strategian ja auttoivat kehittämään sitä eteenpäin.

> ”Hyvä. Toi merkintätapa on tosi fine… Täs on tämmönenkin mahis… tämmösil nuolilla pelata. Kunhan ne on niinku yhdenmukaisia. ” (Ritva)

Opettajien ohjaus keskittyi selvästi tiedon käsittelyyn, kuten oppilaiden ajatteluun, strategioiden käyttöön sekä tehtävänannon tietojen löytämiseen, ymmärtämiseen ja muistamiseen. Opettajat pyysivät oppilaita lukemaan tehtävää uudelleen, kertomaan ajattelustaan ja perustelemaan ratkaisujaan. Matematiikan oppiminen kuitenkin edellyttää myös onnistumisen kokemuksia ja sitä, että oppilas oppii luottamaan ja uskomaan itseensä (Huhtala 1999). Ongelmanratkaisun oppimisessa onkin tärkeää ottaa huomioon myös oppilaiden tunteet ja asenteet toimintaa kohtaa. Opettajien ohjaus kohdistui havainnoimillani oppitunneilla melko vähän ongelmanratkaisun emotionaaliseen puoleen. Opettajat kannustivat ja kehuivat oppilaita jokaisella tunnilla sekä kahden kesken että yhteisissä keskusteluissakin. Useat opettajista kiinnittivät oppilaiden huomion virheisiin, mutta kannustivat jatkamaan yrityksiä, eikä virheitä jääty pohtimaan tai käsittelemään. Pia pyysi oppilaita keskustelemaan tunnin lopuksi ongelmanratkaisukokemuksestaan ja siitä, miltä ongelman kohtaaminen tuntui.

> ”Mut sit nää on kaikki väärin täällä pulpetissa.” (Hannelen oppilas)
> ”No ei se mitään. Mietit tosta eteenpäin uudestaan sen… Pääasia et sä keksit sen systeemin.” (Hannele)

> ”Kertokaa vähän ajatuksia, miltä tää tehtävä ensiksi tuntui, kun näitte sen tuolla taululla. Mikä oli ensireaktio?” (Pia)

6.2 Ongelmanratkaisustrategiat

Vaikka kaikilla oppitunneilla ratkottiin samaa tehtävää, neuvoivat opettajat oppilaita käyttämään erilaisia strategioita ratkaisuun pääsemiseksi. Toisilla tunneilla opettaja ohjasi oppilaitaan johdonmukaisesti käyttämään tiettyä strategiaa, kun taas joillakin tunneilla oppilaat käyttivät keskenään erilaisia strategioita. Kaikilla luokilla oli käytössä muistiinpanovälineet, mutta vastauspaperit eivät olleet samanlaisia.

Kaikki opettajat Katjaa lukuun ottamatta neuvoivat oppilaita miettimään etanan reittiä päivä kerrallaan. He ohjasivat oppilaita merkitsemään selvästi, miten etana on minäkin päivänä liikkunut. Päivä kerrallaan eteneminen korostui erityisesti silloin, kun opettaja auttoi oppilasta pääsemään ratkaisussaan alkuun. Tällöin opettajat auttoivat oppilasta yksinkertaisten kysymysten avulla.

> ”Jos mietit kymmenen päivää: maanantai, tiistai, keskiviikko, torstai, perjantai, lauantai, sunnuntai, maanantai, tiistai, keskiviikko. Mitä se tekee jokaisena päivänä?” (Outi)

> ”Yhtenä päivänä se voi nousta kymmenen senttiä tai kakskyt senttiä. Mitäs me sovittais ekalle päivälle?... Sillon se liikkuis tohon, eiks ni? Sit seuraavana päivänä?” (Hannele)

Useat oppilaat ratkaisivat tehtävää tekemällä etanan etenemisestä yhteen- ja vähennyslaskuja. Osa oppilaista muodosti etanan etenemisestä yhden pitkän laskun, toiset laskivat tehtävän vaiheissa. Kaikille oppilaille ei kuitenkaan ollut selvää, että nouseminen lasketaan yhteenlaskulla ja laskeminen vähennyslaskulla. Juuri laskujärjestystä opetelleet oppilaat kokeilivat liittää ratkaisuunsa myös kertolaskuja. Outi ohjasi tuntinsa aikana oppilaita kokeilemaan muitakin ratkaisutapoja kuin laskun tekemistä.

> ” Kun se on yhteenlasku meneekö se silloin ylös vai alaspäin?” (Outi)

> ”Hei nyt piti miettii myös… monta erilaista tapaa ratkaista. Voiko sen ratkaista muutenkin kuin tollee yhteen ja vähennyslaskuilla? (Outi)

Osalla tunneista opettajat kannustivat oppilaita käyttämään ratkaisussaan erilaisia symboleja. Esimerkiksi Ritva neuvoi oppilaitaan käyttämään ratkaisuissaan jotakin systemaattista merkitsemistapaa.

> ”Keksikää joku merkki, mitä se vois tarkottaa. Täs on yks ratkasu näille päivien kuluille et ne on merkitty näin… pikkunuoli ylöspäin, iso nuoli, ei ollenkaan tai alaspäin.” (Ritva)

> ”Laita vaik niitä nuolia sinne.” (Outi)

Opettajat ehdottivat ongelmatehtävän ratkaisustrategiaksi myös piirtämistä. Osa oppilaista hahmotteli vastaustaan tehtävää havainnollistavan muurin avulla, osa piirsi vastauksensa tyhjälle paperille. Helena ohjeisti oppilaitaan piirtämään etanan etenemisestä viivadiagrammin. Hän perusteli oppilaille diagrammin tekemistä sillä, että piirtäen he osaavat ratkaista tehtäviä, joihin matematiikan taidot eivät vielä riitä.

> ”Sit jos tuntuu, että tota auttaa se, että piirtää niin siihen paperiin voi myös piirtää…” (Tiina)

> ”Ja nyt muistatte eilisestä ongelmasta… että tuli sellaisia tilanteita, ettei meillä ollut ollutkaan matematiikassa sellaista. Ja siksi me piirrämme, mitä se etana tekee… Merkitse rastilla, mihin etana on mielestäsi edennyt päivittäin, mihin toisena, mihin kolmantena. Piirrä sitten viivadiagrammi, joka on opeteltu…” (Helena)

Oppilaille ehdotettiin ongelmanratkaisustrategiaksi myös kokeilemista eli yrityksen ja erehdyksen kautta lähestymistä. Outi rohkaisi oppilaita kokeilemaan erilaisia vaihtoehtoja ja suttaamaan sitten ne, joista ei tullutkaan oikeaa vastausta.

> ”Lähde sinne paperille tekemään. Kato sä voit aina sutata ne, mitkä on sun mielstä pielessä… Eikun kokeilet ihan reippaasti sinne paperille. Jos se ei onnistu, niin vedät vaan rastit yli ja yrität uudestaan.” (Outi)

Tiina haastoi tunnillaan oppilaita kehittämään uusia ratkaisuja edellisen perusteella. Kun parit olivat saaneet ainakin yhden kuvauksen Ellin etenemisestä, hän pyysi heitä pohtimaan, voiko vastausta muuttamalla saada aikaiseksi uuden ratkaisun ongelmaan. Hän haastoi oppilaita miettimään, onko ratkaisu erilainen, jos lukujen paikkaa vain vaihtaa.

> ”Kun keksii yhden ratkaisun, niin sitten kannattaa miettii voisko sitä yhtä valmista ratkasua hyödyntää jotenkin… Voisko sitä jotenkin muuttaa? Löytyiskö tuosta ratkaisusta lisää ratkaisumalleja?” (Tiina)

> ”Jos näitä lukujen paikkoja vaihtaa, niin onko silloin kyseessä sama ratkaisu vai eri ratkaisu?...No kokeilkaa pojat.” (Tiina)

Outi kannusti oppilaita selvittämään Ellin liikkeitä kokoamalla laskusauvoista etanan reitti viivaimen päälle. Hän neuvoi oppilaita siirtelemään laskusauvoja ja merkitsemään ylös niiden avulla keksityt ratkaisut. Outi aloitti myös kaksoistuntinsa toisen puolikkaan jakamalla oppilaille kokonaan uudet paperit, eivätkä oppilaat saaneet enää tarkastella edellisen tunnin ehdotuksia.

Opettajien ohjeissa oli havaittavissa myös viitteitä lopusta alkuun työstämisestä, vaikka tällaista strategiaa kukaan ei varsinaisesti esittänytkään. Esimerkiksi

Hannele ja Outi kuitenkin kiinnittivät oppilaan huomion siihen, miten muutaman viimeisen päivän aikana kannattaa jo miettiä, miten Elli pääsee tasan viidenkymmenen senttimetrin korkeuteen. Ratkaisun loppuvaiheessa liikkeitä pitäisikin miettiä tavoitekorkeuden avulla.

> ”Entäs kahdeksantena päivänä? Muista, että sillä on enää kaks päivää päästä tänne saakka… Sul on kaks päivää enää jäljellä, mut ei se mitään kyl se kahes päiväs ehtii tänne ylös. Mutta paljon sen pitää kipin kapin lähteä tänne ylöspäin?” (Outi)
>
> ”Kymmenentenä päivänä sen pitäis olla tässä eli meidän pitää miettiä, ettei se kovin kauaks lähde tuosta katkoviivasta eiks ni?” (Hannele)

Ongelmatehtävässä oppilaita pyydettiin kuvailemaan niin monta erilaista tapaa kuin mahdollista saada Elli etana kymmenessä päivässä viidenkymmenen senttimetrin korkeuteen. Suurin opettajista ohjasi oppilaita tuottamaan mahdollisimman monta erilaista ratkaisua samalla ratkaisustrategialla. Toiset opettajista kannustivat kuitenkin oppilaita kokeilemaan myös uutta tapaa lähteä etsimään ratkaisua.

6.3 Opettajan kysymykset

Opettajat esittivät oppilaille runsaasti kysymyksiä heti tunnin alusta lähtien. Kierrellessään luokassa auttamassa he ohjasivat oppilaita useimmiten juuri kyselemällä tehtävänannon tietoihin liittyviä kysymyksiä. Osa tunneista päättyi siihen, että opettajat kävivät oppilaiden kanssa kysellen läpi tehtävää ja oppilaiden ratkaisuvaihtoehtoja. Monesti opettaja toisti saman kysymyksen useita kertoja tunnin aikana: hän esitti kysymyksensä ensin useille pareille vuorollaan ja lopuksi koko luokalle tunnin yhteisessä keskustelussa. Opettajien tekemät kysymykset muodostivat aineistossa kuusi luokkaa: tehtävänantoon ja ratkaisun merkitsemiseen liittyvät, työskentelytapaan liittyvät, työskentelyn etenemiseen liittyvät, selityksiä ja perusteluja pyytävät, ajattelua syventävät sekä muut eli epäselvät tai luokan muuhun toimintaan liittyvät kysymykset.

Tehtävänantoon ja ratkaisun merkitsemiseen liittyvät kysymykset muodostivat huomattavan joukon opettajien tekemistä kysymyksistä. Tehtävänannon tietoihin ja vastauksen merkintään liittyvät kysymykset muodostavat yhteisen luokan, sillä useat opettajien kysymyksistä liittyivät molempiin samanaikaisesti. Esimerkiksi Katjan ja Hannelen kysymyksistä selvästi suurin osa kuului tähän luokkaan. Tehtävänantoon ja merkitsemiseen liittyviä kysymyksiä kysyttiin heti tunnin aluksi tehtävänannon lukemisen yhteydessä ja opettajan kierrellessä luokassa auttamassa. Tehtävänantoon ja merkitsemiseen liittyvillä kysymyksillä opettajat kannustivat oppilasta palaamaan tehtävänantoon ja pohtimaan sen asettamia ehtoja. Opettajat ohjasivatkin usein kysymyksillään oppilaita palaamaan ongelmanratkaisuprosessissaan ongelman rajaamisen ja ymmärtämisen vaiheeseen. He ohjasivat kysymyksillään oppilaita myös merkitsemään ratkaisujaan ylös. Tähän luokkaan kuuluvat myös kysymykset, joilla opettaja auttaa oppilasta ratkaisemaan tehtävää päivä kerrallaan.

> ”No mitäs tuol ohjeissa lukee? Kuinkas paljon se pystyi laskeutua?” (Pia)
>
> ”Tässä on toinen päivä. Mitäs siinä tapahtuu?” (Outi)
>
> ”Miten te merkkasitte ne?” (Ritva)

Työskentelytapaan liittyvät kysymykset viittasivat ratkaisun merkitsemisen sijaan tapaan, jolla oppilaat lähtivät tehtävää ratkaisemaan. Kysymyksillään opettajat kommentoivat oppilaiden valitsemaa ratkaisustrategiaa ja ehdottivat vaihtoehtoisia ratkaisutapoja. Luokkaan sijoittui myös kysymyksiä, joilla opettaja kannustaa oppilaita miettimään ja suunnittelemaan ratkaisuprosessiaan.

> ”Voiks sitä piirtää mitenkään?” (Outi)
>
> ”Joo miten sä ajattelet, että jakolaskua olis voinut käyttää tossa?” (Pia)
>
> ”Mitä miten te voisitte tän ratkaista?” (Outi)

Myös työskentelyn etenemiseen liittyviä kysymyksiä esiintyi usein varsinkin opettajien kierrellessä luokassa seuraamassa työskentelyä ja auttamassa oppilaita. Usein työskentelyn etenemiseen liittyvät kysymykset olivat keskustelunavauksia, joilla opettajat kiinnittivät oppilaiden huomion ja pyysivät heitä kertomaan työskentelystään ja vastauksistaan. Tähän luokkaan kuuluu myös kysymyksiä, joilla opettaja selvittää, ovatko oppilaat ymmärtäneet, miten tehtävää tehdään.

> ”Kuinkas monta erilaista vaihtoehtoa te olette jo löytäneet?” (Katja)
>
> ”Pääskö nyt aika moni juoneen kiinni?” (Ritva)

Selityksiä ja perustelua pyytävillä kysymyksillä opettajat ohjasivat oppilaita kertomaan, mitä he ovat ongelmaa ratkaistessaan ajatelleet. Tällaisia kysymyksiä esiintyi erityisesti silloin, kun oppilaat lopputunnista esittelivät ratkaisujaan muille. Opettajat pyysivät oppilailta myös perusteluja ratkaisutavoilleen. Muutamissa tapauksissa opettajat pyrkivät kysymystensä avulla auttamaan ratkaisua etsiviä oppilaita löytämään ehdotustensa virheet. Aineistossa esiintyi lisäksi joitakin oppilaiden tunteisiin ja ongelmatehtävän kohtaamiseen liittyviä kysymyksiä.

> ”Joo no miten te tästä ensimmäisestä ratkaisusta… päädyitte tähän toiseen ratkasuun?” (Tiina)
>
> ”Perustele mulle, jos sä teet tähän sen merkinnän etkä tähän viivalle, niin miten se lisää sun mahdollisuuksien määrää.” (Helena)

Ajattelua syventäviksi kysymyksiksi luokiteltiin sellaiset puheenvuorot, joilla opettaja kannusti oppilaita kokeilemaan ongelmanratkaisussa jotakin uutta lähestymistapaa tai näkökulmaa. Ajattelua syventävät kysymykset eivät kannusta vain käyttämään jotakin toista ratkaisumenetelmää tai etsimään lisää vastauksia. Luokkaan sisältyvät kysymykset, joilla opettaja ohjaa oppilaita pohtimaan ongelmaa oikean ratkaisun etsimistä laajemmin tai syvällisemmin. Esimerkiksi Tiina kannusti oppilaita pohtimaan uusien ratkaisujen sijaan sitä, millä tavoin olemassa olevan ratkaisun voi muokata uudeksi ratkaisuksi. Osa kysymyksistä oli suunnattu koko oppilasryhmälle, toiset selvästi vain yhdelle ratkaisijalle. Kysymykset liittyvät tähän luokkaan tapauskohtaisesti: jollekin oppilaalle esimerkiksi kysymys siitä, voisiko etana edetä muurilla jonakin päivänä yli viidenkymmenen senttimetrin ja sitten laskeutua alas, muutti koko tavan ajatella ongelmaa.

> ”Te saitte kolmetoista, mut meinaatsä et te löysitte kaikki vaihtoehdot mitä on olemassa?” (Pia)
>
> ”Mut nyt mä esitän edelleenkin sen saman kysymyksen mikä on ongelma? Onko niitä vaan matikassa niitä ongelmia?” (Tiina)

”Mikä näistä eri tavoista, älkää miettikö omaanne… Mikä oli näistä helpoin tapa ratkaista?” (Outi)

Taulukossa 3 esitetään kysymysten opettajakohtainen jakautuminen eri kysymysluokkiin. Yhdeksi kysyväksi ilmaukseksi on erotettu kysyvä puheenvuoro, joka saattaa sisältää useamman kysymyssanan tai saman kysymyksen toistamisen useaan kertaan eri sanoin. Opettajat erosivat toisistaan selvästi sekä kysymysten määrän että yleisimmän luokan perusteella. Opettajakohtaisissa kysymyksien kokonaismäärissä esiintyy selkeää vaihtelua, ja oppitunnit poikkesivatkin toisistaan opettajan ja oppilaiden välisen keskustelun määrän suhteen.

Taulukko 3 Opettajan esittämät kysymykset oppitunneilla

Nimi	*Tehtävänanto ja ratkaisun merkintä*	*Työskentelytapa*	*Työskentelyn eteneminen*	**Selityksien ja perustelun pyytäminen**	*Ajattelun syventäminen*	**Muut**	**Yhteensä**
Katja	**11**	**0**	**1**	**0**	**0**	**4**	16
Pia	**10**	**2**	**10**	**7**	**5**	**4**	38
Helena	**15**	**0**	**5**	**3**	**0**	**1**	24
Ritva	**12**	**1**	**5**	**0**	**0**	**8**	26
Sofia	**19**	**4**	**4**	**2**	**2**	**4**	35
Tiina	**18**	**7**	**18**	**27**	**15**	**5**	90
Hannele	**43**	**3**	**4**	**3**	**0**	**5**	58
Outi	**94**	**6**	**4**	**18**	**9**	**8**	139
Yhteensä	222	23	51	60	31	39	

Jokaisen opettajan esittämien kysymysten jakautumista eri kysymysluokkiin tarkastellaan taulukossa 4. Taulukkoon on koottu jokaisen kysymysluokan ilmauksien prosentuaalinen osuus opettajan kaikista kysyvistä ilmauksista. Opettajat erosivat toisistaan selvästi kysymysluokkien suhteellisen osuuden perusteella. Huomattava osa opettajien tekemistä kysymyksistä sijoittui tehtävänantoon ja ratkaisun merkitsemiseen liittyviin kysymyksiin. Katjan esittämistä kysymyksistä useimmat liittyivät tehtävänannossa esitettyihin tietoihin, eikä hän kysymyksillään pyytänyt oppilaita perustelemaan valintojaan tai selittämään ajatuksiaan. Hannele puolestaan auttoi useita yksittäisiä oppilaita miettimään etanan reittiä päivä kerrallaan. Hän esittikin tunnilla runsaasti kysymyksiä siitä, mikä etenemisvaihtoehdoista seuraavalle päivälle valitaan. On kuitenkin todettava, ettei kyseinen luokka ollut yleisin kaikkien opettajien kohdalla. Esimerkiksi Tiina esitti oppitunneillaan selvästi enemmän selityksiä ja perusteluja pyytäviä kysymyksiä.

Hän kannustikin aktiivisesti oppilaitaan pohtimaan, voiko olemassa olevia ratkaisuja muokkaamalla luoda lisää uusia vastauksia. Hän pyysi oppilaita toistuvasti kertomaan, miten ovat ratkaisussaan edelleen ja miten ovat saaneet yhdestä vastauksesta muokattua seuraavan. Katjan, Helenan tai Hannelen videoituun oppitunnin loppuun ei kuulunut yhteistä keskusteluosuutta ja valmiiden ratkaisujen käsittelyä, ja kysymykset näyttäisivätkin painottuvan enemmän tehtävän ymmärtämiseen.

Taulukko 4 Kysymysluokkien suhteelliset osuudet opettajien kysymyksistä

Nimi	*Tehtävänanto ja ratkaisun merkintä*	*Työskentelytapa*	*Työskentelyn eteneminen*	**Selityksien ja perustelun pyytäminen**	*Ajattelun syventäminen*	**Muut**	**Yhteensä**
Katja	**68,75%**	**0,00%**	**6,25%**	**0,00%**	**0,00%**	**25,00%**	100%
Pia	**26,32%**	**5,26%**	**26,32%**	**18,42%**	**13,16%**	**10,53%**	100%
Helena	**62,50%**	**0,00%**	**20,83%**	**12,50%**	**0,00%**	**4,17%**	100%
Ritva	**46,15%**	**3,85%**	**19,23%**	**0,00%**	**0,00%**	**30,77%**	100%
Sofia	**54,29%**	**11,43%**	**11,43%**	**5,71%**	**5,71%**	**11,43%**	100%
Tiina	**20,00%**	**7,78%**	**20,00%**	**30,00%**	**16,67%**	**5,56%**	100%
Hannele	**74,14%**	**5,17%**	**6,90%**	**5,17%**	**0,00%**	**8,62%**	100%
Outi	**67,63%**	**4,32%**	**2,88%**	**12,95%**	**6,47%**	**5,76%**	100%

Myhill (2006) on jaotellut kysymykset niiden muodon perusteella neljään ryhmään: suljettuihin, avoimiin, oppimisprosessiin liittyviin sekä toimintatapaan liittyviin kysymyksiin (Myhill 2006, 25–26). Aineistosta esiin nousseet kysymykset suhtautuvat Myhillin luokitteluun siten, että useat tehtävänantoon ja ratkaisun merkitsemiseen liittyvät kysymykset ovat muodoltaan suljettuja ja niiden vastaus on ennalta määrätty tehtävänannossa. Tällainen kysymys on esimerkiksi se, että opettaja tiedustelee oppilaalta, miten etanalle käy syvän unen aikana. Useat selittämiseen ja perusteluun kannustavat kysymykset olivat luonteeltaan avoimia. Näiden lisäksi avoimia kysymyksiä löytyy ajattelua syventävien kysymysten joukosta. Oman toiminnan selittämiseen ja perusteluun kannustavat kysymykset olivat usein myös oppimisprosessiin liittyviä, koska ne edellyttivät oppilailta omasta ajattelusta kertomista. Toimintaan, esimerkiksi tunnin organisointiin liittyvät kysymyksen kuuluvat tutkielmani luokituksessa kohtaan muuhun toimintaan liittyvät kysymykset.

6.4 Oppilaiden kysymykset

Oppilaat esittivät ongelmanratkaisutuntien aikana opettajalle kysymyksiä tehtävän lukemisen ja siihen tutustumisen aikana sekä ratkoessaan tehtävää yksin tai ryhmän kanssa. Oppilaiden opettajalle tekemät kysymykset muodostivat kuusi luokkaa: tehtävän tietoihin ja vastauksen merkitsemiseen liittyvät, tehtävän tavoitteeseen liittyvät, työskentelyyn liittyvät, oman osaamisen varmistamiseen liittyvät, avunpyynnön sisältävät kysymykset sekä muut kysymykset, jotka olivat epäselviä tai eivät liittyneet ongelmanratkaisutehtävään ollenkaan. Oppilaiden esittämien kysymysten määrä vaihteli suuresti eri opettajien tuntien välillä. Katjan hiljaisella tunnilla oppilaiden esittämiä kysymyksiä kertyi vain muutamia, kun taas esimerkiksi Hannelen tunnilla oppilaiden kysymyksiä esiintyi moninkertainen määrä.

Selvästi suurin osa oppilaiden esittämistä kysymyksistä liittyi tehtäväannon tietoihin ja ratkaisuehdotuksen merkitsemiseen.

> ”Onks se voinut liikkua joinain päivinä kymmenen ja joinain kakskyt? (Outin oppilas)
>
> ”Onks se lähtöpiste aina tossa?” (Helenan oppilas)
>
> ”Voiks tähän laittaa, et se nousee vaik yhden sentin ja sit kaheksan?” (Tiinan oppilas)
>
> ”Niin et saiks tähän piirtää?” (Tiinan oppilas)
>
> ”Miten se merkitään, kun tää etana nukkuu?” (Helenan oppilas)

Tehtävän tavoitteeseen liittyvillä kysymyksillä oppilaat selvittivät ja varmistivat, että olivat ymmärtäneet ongelmatehtävän ajatuksen oikein. Tällaisia kysymyksiä esitettiin oppitunnin alun lisäksi myös myöhemmin tehtävää tehdessä.

> ”Eli täs pitää keksii niit eritapoi et se on kymmenen päivän jälkeen vast tos viidessäkymmenessä?” (Pian oppilas)
>
> ”Ai tää sama lasku pitäis tehdä uusiks?” (Outin oppilas)
>
> ”Eli onks täs nyt tarkotus keksii eri tapoja?” (Tiinan oppilas)

Työskentelyyn liittyvillä kysymyksillä oppilaat selvittivät, millä tavoin tunnilla työskennellään ja mitä heidän kuuluisi seuraavaksi tehdä. Nämä kysymykset eivät liittyneet varsinaiseen ratkaisun etsimiseen ja merkitsemiseen, vaan esimerkiksi tunnin työskentelytapoihin, parityöskentelyyn ja työvälineisiin.

> ”Saaks tätä tehdä ryhmässä?” (Hannelen oppilas)
>
> ”Entäs sitten kun mä oon valmis?” (Hannelen oppilas)
>
> ”Niin et saadaanks me toinen paperi? (Helenan oppilas)

Oppilaat pyysivät tuntien aikana opettajia myös kommentoimaan, onko heidän ratkaisuehdotuksensa oikea. Luokittelin tällaiset puheenvuorot oman osaamisen varmistamiseen liittyviin kysymyksiin. Avunpyynnön sisältävillä kysymyksillä oppilaat pyysivät opettajaa luokseen auttamaan.

> ”Onks tää väärin?” (Sofian oppilas)
>
> ”Noni onks tää hyvä?” (Hannelen oppilas)
>
> ”Voiks tulla ihan sekka?” (Helenan oppilas)

Epäselvien kysymysten lisäksi oppilaat esittivät opettajilleen myös kysymyksiä, jotka eivät suoraan liittyneet ongelmantehtävään, sen ratkaisemiseen tai tunnin työskentelyyn.

> ”Mitä onks toi se kamera?” (Ritvan oppilas)
>
> ”Miten te suomensitte sitten ton espanjasta?” (Outin oppilas)

Suurin osa oppilaiden esittämistä kysymyksistä oli yksinkertaista neuvojen ja ohjeiden pyytämistä. Kysymyksissä toistuikin paljon sanoja voiko, saako, pitääkö, onko ja miten. Selityksiä ja perusteluita pyytäviä kysymyksiä esiintyi hyvin vähän. Aineiston perusteella näyttäisi siltä, että oppilaat hyväksyivät tuntien aikana tehtävänannon ehdot ja opettajan ohjeet pyytämättä perusteluja. Opettajalle esitettyjen kysymysten lisäksi oppilaat kyselivät paljon parilta, jonka kanssa tehtävää ratkaistiin. Välillä oppilaat esittivät kysymykset itselleen ääneen ajatellen. Tässä luvussa esittelinkin vain ne kysymykset, joita oppilaat esittivät selvästi opettajalle.

Taulukkoon 5 on kerätty oppilaiden opettajilleen oppituntien aikana esittämät kysymykset. Oppilaiden esittämien kysymysten määrä vaihteli alle kymmenestä yli neljäänkymmeneen kysymykseen. Eri opettajien oppitunnit poikkesivat toisistaan myös siten, että yleisin kysymystyyppi vaihteli opetusryhmän mukaan. Esimerkiksi Hannelen tunnilla tehtävänannon tietoihin ja vastauksen merkitsemiseen liittyviä kysymyksiä tehtiin selvästi eniten, kun taas Ritvan ja Outin tunneilla oppilaat kysyivät eniten ongelmanratkaisuun liittymättömiä kysymyksiä.

Taulukko 5 Oppilaiden esittämät kysymykset oppitunneilla

Nimi	***Tehtävän tiedot ja vastauksen merkitseminen***	***Tehtävän tavoite***	***Työskentely***	**Oma osaaminen**	***Avunpyyntö***	**Muut**	**Yhteensä**
Katja	**1**	**2**	**1**	**0**	**0**	**2**	6
Pia	**7**	**2**	**1**	**0**	**0**	**4**	14
Helena	**13**	**2**	**5**	**1**	**6**	**2**	29
Ritva	**7**	**1**	**5**	**0**	**7**	**14**	34
Sofia	**4**	**3**	**3**	**3**	**0**	**5**	18
Tiina	**7**	**2**	**2**	**0**	**1**	**2**	14
Hannele	**23**	**6**	**6**	**4**	**2**	**4**	45
Outi	**8**	**2**	**3**	**2**	**0**	**17**	32
Yhteensä	70	20	26	10	16	50	

6.5 Opettaja kuuntelijana ja palautteen antajana

Opettajan kuuntelemista matematiikan tunneilla on kuvattu kuuntelemistasojen kautta (Ahtee & Pehkonen 2005, 301–305). Tässä tutkielmassa tulkitsin opettajan kuuntelemisen tasoa opettajan tekemien kommenttien ja palautteen perusteella. Koska opettajat seurasivat oppilaiden työskentelyä pysähtymällä parien tai oppilasryhmien viereen ja tarkastelemalla heidän vastausehdotuksiaan, sekoittuu kommentteihin sekä oppilaan puheenvuorojen kuuntelua että kirjallisen vastauksen tulkintaa. Osa kuulemistasoille sijoitetuista kommenteista liittyykin opettajan tekemiin näköhavaintoihin, sillä opettajat kommentoivat sanallisesti myös oppilaiden kirjaamia ratkaisuehdotuksia.

Alin taso muodostuu opettajan kuuntelemattomuudesta. Kaikki kuuntelemattomuus ei varmastikaan tule ilmi aineistossani, sillä oppilaiden kommenteista on välillä vaikea päätellä, kenelle he kysymyksensä esittävät. Aineistossani kuuntelemattomuus ilmeni kuitenkin siten, että opettaja ei reagoinut oppilaan kysymykseen tai kommenttiin mitenkään tai sivuutti kommentin, koska asiassa täytyi päästä eteenpäin. Esimerkiksi Ritva sivuutti kommentillaan oppilaan pyynnön päästä vielä mukaan arvuuttelemaan opettajan ystävää, sillä tunnin varsinainen sisältö oli ongelmatehtävä eikä arvuutteluleikki.

> ”Ei. Me mennään aiheessa eteenpäin tää oli orientaatio etanaan.” (Ritva)

Opettajat kuuntelivat oppilaita valikoivasti siten, että he saattoivat välillä kuunnella vai osan oppilaan puheenvuorosta, ja kommentoida eri asiaa, mitä oppilas oli kysymyksellään tarkoittanut. Opettajat eivät aina reagoineet kaikkeen oppilaan puheeseen, vaan valitsivat kommentoitavaksi keskeiset asiat. Useat opettajista valikoivat kuuntelun ulkopuolelle myös ongelmanratkaisuun liittymättömät kommentit ja jättivät huomiotta oppilaat, jotka eivät viitanneet.

> ”Hei, siel on sata senttimetriä.” (Sofian oppilas)
>
> ”Muistetaan viittaaminen.” (Sofia)

Arvioivaan kuunteluun sisältyivät kommentit, joilla opettaja hyväksyi oppilaan vastauksen tai kiinnitti huomiota sen virheisiin. Osa arvioista oli vain yksisanaisia kehuja. Ahteen ja Pehkosen (2005) mukaan arvioivasti kuunteleva opettaja saattaa myös kommentoida oppilaan vastausta muuttamalla hänen käyttämänsä termit korrektiin muotoon. Useissa tapauksissa opettajat muotoilivatkin oppilaiden vastauksia täsmällisemmiksi. Esimerkiksi Helena ja Sofia reagoivat oppilaan vastaukseen toistamalla sen omin sanoin.

> ”Niin eli se yrittää päästä ylöspäin, raukka.” (Helena)
>
> ”Kyllä eli siel… luvut on tuttuja. Tuol on kakskymmentä, tuol on kymmenen ja senttimetrit on meille tuttuja mittayksiköitä.” (Sofia)

Tulkitsevasti kuunteleva opettaja yrittää ymmärtää oppilaan vastauksen matematiikan opettajana. Opettajalla ei ole mielessä valmista vastausta ja hän saattaakin toistaa oppilaan vastauksen toisilla sanoilla ja prosessoida siten kuulemaansa. (Ahtee & Pehkonen 2005, 301–305.) Useissa tapauksissa opettajat reagoivatkin oppilaiden puheenvuoroihin toistamalla ajatuksen omin sanoin, usein matemaattisia käsitteitä käyttäen. Tuntien loppupuolen purkuvaiheessa opettajat usein toistivat oppilaan vastauksen omin sanoin tarkistaessaan, että vastaus todellakin täyttää ratkaisulle asetetut ehdot. Omassa aineistossani tulkitsevasti kuuntelevat opettaja pyysi oppilasta myös itse muotoilemaan kysymyksensä uudelleen sellaiseksi, että hän osaisi vastata siihen oikein.

> ”Nyt te olette tehneet tähän tällaisen lausekkeen, missä on sovellettu kertolaskua ja sitten laskujärjestystä. Eli hyvin oivallettu tää soveltaminen. ” (Sofia)

> ”Enpäs ymmärtänyt kysymystä, sanos jotenkin muuten. ” (Helena)

Opettaja kuuntelee oppilasta avoimesti silloin, kun hän arvostaa oppilaan ajatuksia, ja tavoitteena on ymmärtää, mistä ajatukset ovat tulleet ja mihin oppilas pyrkii. Opettaja ei odota oppilaan ajattelevan tietyllä tavalla, vaan hänellä on vapaus kehittää uusia ajatuksia. (Ahtee & Pehkonen 2005, 301–305.) Aineistossani opettajat esittivät useita kysymyksiä ja kommentteja, joilla pyysivät oppilaita kertomaan ajattelustaan ja perustelemaan toimintaansa. Opettajat siis aktiivisesti pyrkivät luomaan tilanteita, joissa oppilaat pääsevät kertomaan, mistä ajatukset ovat tulleet.

> ”Joo, miten sä ajattelet että jakolaskua olis voinut käyttää tossa?” (Pia)

> ”Olipa mielenkiintoinen ongelma, en tullutkaan tota ajatelleeksi että toi on matemaattisesti... Tässä on erittäin hyvä idea, mä alan aavistamaan mitä te ootte ajatelleet sillä siinä on systeemi hyvä.” (Helena)

Ahtee ja Pehkonen (2005, 301–305) esittävät, että opettajien kuunteleminen pysyy yleensä kolmella ensimmäisellä tasolla. Ongelmanratkaisutuntien aikana näyttäisi kuitenkin siltä, että tehtävien luonne kannustaa myös opettajia kuuntelemaan tulkitsevasti ja avoimesti. Tehtävään ei ole olemassa tiettyä oikeaa vastausta, joten opettajan täytyy selvittää, mitä oppilas ajattelee ja miten hän osaa perustella näkemyksensä.

Tulkitsin tässä tutkielmassa opettajien kuuntelemisen tasoa kysymysten ja ohjeiden lisäksi myös heidän antamansa palautteen pohjalta. Opettajan antama palaute voidaan jakaa esimerkiksi suorituksiin liittyvään palautteeseen, strategiapalautteeseen, motivaatioon liittyvään palautteeseen ja attribuutiopalautteeseen (Pintrich & Schlunk 2002, 301–305). Suorituksiin liittyvä palaute antaa oppilaille korjaavaa informaatiota ja kertoo, miten hyvin oppilas on työnsä suorittanut. Aineistoni muodostavilla oppitunneilla suurin osa opettajien oppilaille antamasta palautteesta on lyhyitä kommentteja, joilla he kannustivat oppilaita ja hyväksyivät oppilaiden vastaukset. Palautteissa toistuivat esimerkiksi sanat hyvä ja hienoa. Strategiapalaute puolestaan auttaa oppilaita huomaamaan, miten onnistuneesti he ovat käyttäneet jotakin oppimisstrategiaa suoritustensa parantamiseksi. Opettajat antoivat tuntien aikana oppilaille palautetta myös ongelmanratkaisustrategioiden käytöstä.

> ”Joo tää on oikein tää ensimmäinen.” (Sofia)
>
> ”Jee, hyvä tytöt te teitte sen.” (Ritva)
>
> ”Hyvä, te ootte lähteneet tolla tavalla piirtämään, loistavaa.” (Tiina)
>
> ”Hyvä merkintätapa on nää nuolet. Tän tajuu kaikki.” (Ritva)

Korjausehdotuksillaan opettajat kannustivat oppilaita palaamaan takaisin tehtävän tietoihin. Valtaosa korjausehdotuksista liittyikin etanan liikkumiseen.

> ”Täs sul on vähän mennyt liikaa. Se ei ihan noin paljon yhtenä päivänä pysty kiipeemään.” (Hannele)
>
> ”Iik, iik, iik.. ei käy, sen pitää tost siirtyy jotenkin tonne. Katsokaa onko mahdollista.” (Helena)

Motivaatioon liittyvän palaute ja attribuutiopalaute muodostavat kaksi muuta palautteen luokkaa (Pintrich & Schlunk 2002, 318–322). Aineistossani kolmanneksi palauteluokaksi muodostui kuitenkin oppilaan ominaisuuksiin ja työskentelytapaan, esimerkiksi ahkeruuteen, innokkuuteen tai yhteistyön tekoon liittyvä palaute. Palautteen avulla opettajat eivät vertailleen oppilaita toisiinsa, vaan nostivat menestymisen perusteluksi jonkin piirteen oppilaan toiminnasta. Ryhmään kuuluvat palautteet ovat kehuja, jotka tarkentuvat johonkin tiettyyn toimintatapaan tai ominaisuuteen.

> ”Niin se on ihan oikein kun te ryhmässä teette.” (Hannele)
>
> ”Aika hyvin. Kyllä te ootte nyt tosi pitkälle miettineet tätä asiaa. Ja hienosti ootte hyödyntäneet sitä ensimmäistä ratkaisua, tosi hyvä pojat.” (Tiina)
>
> ”Mä uskon, että te ootte olleet tosi nokkelia.” (Ritva)

6.6 Yhteenveto

Aineistoni muodostavilla matematiikan tunneilla ongelmanratkaisun opettaminen näytti koostuvan useista osa-alueista. Eräs tärkeä väline ongelmanratkaisun ohjaamisessa vaikuttaisi olevan kysymyksien tekeminen. Opettajien tekemät kysymyksien muodostamat luokat aineistoni perusteella olivat tehtävänantoon ja ratkaisun merkitsemiseen liittyvät, työskentelytapaan liittyvät, työskentelyn etenemiseen liittyvät, selityksiä ja perusteluja pyytävät, ajattelua syventävät sekä epäselvät tai luokan muuhun toimintaan liittyvät kysymykset. Huomattava osa opettajien kysymyksistä ja ohjauksesta kohdistui tehtävänannon lukemiseen, ymmärtämiseen ja muistamiseen. Auttaessaan oppilasta ymmärtämään ongelmaa opettajan voikin esittää kysymyksiä, jotka auttavat tätä kiinnittämään huomiota keskeisiin tietoihin (LeBlanc 1977, 17). Myös Moses (1982, 12) ehdottaa, että oppilaita voi auttaa tehtävän lukemisessa ja ymmärtämisessä selittämällä vaikeita sanoja ja muotoilemalla ongelmaa uudelleen omin sanoin.

Ongelmanratkaisuprosessin ensimmäisen vaiheen lisäksi opettajat kiinnittivät ohjauksellaan ja kysymyksillään huomiota myös erilaisten ongelmanratkaisustrategioiden käyttöön joko niin, että he suosittelivat oppilaille toisen strategian kokeilua tai opastivat yhden strategian käytössä. Osa opettajista auttoi kysymyksiensä avulla oppilaita tiedostamaan omaa ajatteluaan ja kertomaan siitä sekä perustelemaan valintojaan ja arvioimaan ratkaisunsa onnistumista. Opettajat myös kannustivat oppilaita pohtimaan tehtävää yksittäisten ratkaisujen etsimistä laajemmin. He esimerkiksi pyysivät pohtimaan, miten yhdestä ratkaisusta voi muokata toisen tai minkä verran mahdollisia ratkaisuja voi olla olemassa. Opettajien ohjauksessa ja kysymyksissä nousi selvästi esiin myös ongelmanratkaisuprosessin vaiheesta toiseen ohjaaminen. Opettajat ohjasivat oppilaita palaamaan ratkaisuprosessissaan edellisiin vaiheisiin tai etenemään seuraaviin. He myös kannustivat oppilaita aloittamaan uuden ratkaisuprosessin siten, että oppilaat vaihtoivat ratkaisustrategiaa tai pohtivat ongelmaa toisesta näkökulmasta.

Oppilaiden opettajalle tekemistä kysymyksistä muodostuvat luokat olivat tehtävän tietoihin ja vastauksen merkitsemiseen liittyvät, tehtävän tavoitteeseen liittyvät, työskentelyyn liittyvät, oman osaamisen varmistamiseen liittyvät, avunpyynnön sisältävät kysymykset sekä muut, kuten aiheeseen liittymättömät kysymykset. Eri oppitunnit erosivat toisistaan sekä kysymysten määrän että yleisimmän kysymysluokan suhteen. Tehtävä tavoitteeseen ja tehtävänantoon liittyviä kysymyksiä ei esiintynyt vain tuntien alussa, vaan myös kesken ratkaisun etsimisen. Oppilaat selvittivät niiden avulla esimerkiksi, miten tehtävän ratkaisut merkitään, ja onko heidän etanansa liikkunut oikein. Havainnot näyttäisivät tukevan Hähkiöniemen ym. (painossa) ajatusta siitä, etteivät oppilaat laadi oppituntien aikana varsinaista suunnitelmaa ongelman ratkaisemiseksi. He palaavat tehtävänantoon, sen tavoitteisiin ja ehtoihin myös siinä vaiheessa, kun varsinainen ratkaisuprosessi on jo käynnissä. Moni oppilas lähti heti ratkaisemaan tehtävää, vaikka myöhemmin heidän kysymyksensä paljastivat, ettei tehtävää ole täysin ymmärretty.

Kaikilla ongelmanratkaisutunneilla oppilaat työskentelivät ryhmissä. Myös opettajan toiminta mukautui ryhmätyöskentelyyn: suurimman osan ajasta oppilaat työskentelivät ja keskustelivat parin kanssa ja opettaja toimi luokassa kiertelevänä auttajana. Leiwon ym. (1987a, 1987b) tutkimuksen tuloksista poiketen, varsinainen opetus ja auttaminen tapahtuivat usein yhden tai muutaman oppilaan kanssa keskustellen. Koko luokan yhteinen keskustelu sijoittui oppitunneilla tuntien alkuun ja mahdolliseen ratkaisujen tarkasteluun. Tuntien alussa suurin osa opettajista halusi käydä tehtävää läpi yhteisesti ja tarkasteluvaiheessa opettajat auttoivat oppilaitaan tuomaan ajatuksiaan ja perustelujaan mukaan yhteiseen keskusteluun. Opettajan ja oppilaan vuorovaikutus olikin useissa tapauksissa enemmän keskustelua ja yhdessä pohtimista kuin asian opettamista tai tietojen esittämistä. Oppilaan vastauksen ja ajatuksien kuuntelu näyttäisikin muodostuvan erääksi ongelmanratkaisun opettamisen osa-alueeksi. Avoimelle ongelmatehtävälle ei ole asetettu yhtä oikeaa vastausta, joten oppilaan ratkaisun toimivuus määräytyy perustelujen ja ehtojen noudattamisen mukaan. Auttaakseen oppilaita opettajan on kuunneltava, miten he ovat ratkaisunsa etsimisessä edenneet.

Varsinaiseen ongelmanratkaisuun liittyvän ohjauksen lisäksi aineistossa esiintyi jonkin verran myös emotionaalista ohjausta kannustuksen ja palautteen annon muodossa. Yksi opettajista kannusti oppilaita myös kertomaan siitä, miltä ongelman kohtaaminen tuntuu. Ratkaisuehdotuksia ei aina systemaattisesti tarkistettu ja osalla tunneista opettajat kannustivat oppilaita vain yliviivaamaan väärät vastaukset ja jatkamaan tehtävän suorittamista. Näyttäisikin sitä, että virheiden korjaamisen sijaan useat opettajista pitivät tärkeänä ratkaisujen kehittelyä ja kokeilemista sekä omista ratkaisuista kertomista.

7 Luotettavuus

Tutkimusmenetelmien luotettavuuden tarkastelussa käytetyt käsitteet ovat perinteisesti olleet reliabiliteetti ja validiteetti. Laadullisen tutkimuksen luotettavuus voidaan kuitenkin nähdä laajemmin koko tutkimuksen eikä vain mittauksen luotettavuuden arviointina. Laadullinen tutkimus ei ole yhtenäinen tutkimusperinne, vaan siihen kuuluu useita erilaisia lähestymistapoja ja tutkimustekniikoita. Myös luotettavuustarkasteluun liittyvistä kysymyksistä on olemassa erilaisia käsityksiä. (Tynjälä 1991, 388, 396.) Lincoln ja Guba (1985, 294–301) määrittelevät luotettavuuden tai uskottavuuden (trustworthiness) osatekijöiksi totuusarvon, sovellettavuuden, pysyvyyden ja neutraalisuuden. Tutkijan on pyrittävä siihen, että hän on tarkastellut sitä, mitä on aikonutkin tutkia. Laadullisessa tutkimuksessa ei tähdätä toistettavuuteen vaan luotettavaan kuvaukseen ilmiöstä.

Totuusarvon kriteerinä voidaan pitää vastaavuutta (credibility). Tutkijan tulee osoittaa, että tutkimuksessa rakennetut rekonstruktiot tutkittavien todellisuuksista vastaavat alkuperäisiä konstruktioita todellisuudesta. (Lincoln & Guba 1985, 296; Tynjälä 1991, 390.) Lincoln ja Guba tarkastelevat tutkimustulosten yleistettävyyden sijaan siirrettävyyttä (transferability) sovellettavuuden kriteerinä. Tulosten siirrettävyys toiseen kontekstiin riippuu tutkitun ympäristön ja sovellusympäristön samankaltaisuudesta. Vastuu siirrettävyyden varmistamisesta ei kuulu ainoastaan tutkijalle, sillä hän tuntee vain tutkitun kontekstin. Näin ollen osa siirrettävyyden arvioinnista kuuluu myös tutkimustulosten käyttäjälle. (Lincoln & Cuba 1985, 296–297.) Tutkijan on kuvailtava aineistoaan ja tutkimustaan riittävästi, jotta lukija kykenee arvioimaan tulosten soveltumista myös muihin konteksteihin (Tynjälä 1991, 390).

Pyrin varmistamaan tutkimukseni luotettavuutta toimimalla huolellisesti ja ottamalla analyysiin mukaan mahdollisimman kattavasti kaikki ongelmanratkaisutuntien vuorovaikutustilanteet. Videotallenteiden käyttö litteroidun aineiston tukena auttaa tulkitsemaan puheenvuoroja oikeassa kontekstissa. Samalla pystyn varmistumaan valmiiksi tehdyn litteroinnin tarkkuudesta. Pyrin lisäämään tutkimukseni luotettavuutta käyttämällä tulkintojeni tukena runsaasti suoria lainauksia litteroiduista aineistosta ja kuvailemaan oppituntien kulkua riittävästi. Näin lukija pääsee varmistamaan, ovatko tekemäni tulkinnat asianmukaisia.

Siirrettävyyden varmistamiseksi olen pyrkinyt kuvailemaan tutkimuksen kulun riittävän tarkasti. Oman tutkimukseni kohteena ovat pitkäkestoiseen ongelmanratkaisun opetusta tarkastelevaan projektiin osallistuvat luokat. Sellaisenaan näiden luokkien ongelmanratkaisun opetus ei ole verrattavissa tai siirrettävissä kolmannen luokan vuosiluokan matematiikan opetukseen. Siirrettävyyttä tarkasteltaessa on otettava huomioon, että aineistoa ei ole kerätty satunnaisesti valituissa kolmansissa luokissa, vaan oppitunnit ovat osa laajempaa projektia.

Tutkimustulosten pysyvyyden arvioinnissa on otettava huomioon, että tutkimuksen aikana voi esiintyä vaihtelua tutkijassa itsessään (esimerkiksi haastattelutekniikan kehittyminen), ympäröivissä olosuhteissa tai tutkittavassa ilmiössä. Tutkijan on otettava huomioon sekä erilaiset ulkoista vaihtelua aiheuttavat tekijät että tutkimuksesta ja ilmiöstä itsestään johtuvat tekijät. (Lincoln & Cuba 1984, 298–299; Tynjälä 1991, 391.) Tässä tutkielmassa vaihtelua tapahtui esimerkiksi analyysivaiheessa, kun luokittelutekniikka kehittyi analyysin edetessä. Alustavan analyysin jälkeen ilmausten luokittelu tarkistettiin useaan kertaan tarvittaessa myös videotallenteelta. Näin pyrin varmistamaan, että kaikki ilmaukset on luokiteltu samojen periaatteiden mukaisesti.

Lincolnin ja Guban mukaan neutraalisuuden vaatimus on siirrettävä tutkijasta aineistoon. Neutraalisuuden kriteerinä voidaan pitää vahvistettavuutta (confirmability), joka saavutetaan kun erilaisin tekniikoin on varmistuttu tutkimuksen totuusarvosta ja sovellettavuudesta. Neutraalisuutta voi arvioida tutkijan lisäksi myös ulkopuolinen tarkastaja. (Lincoln & Guba 1985, 289–301, Tynjälä 1991, 392.)

Tutkielmani tuloksia tarkastellessa täytyy ottaa huomioon, että havainnot on tehty videon perusteella. Videon käyttö mahdollistaa tilanteiden tarkastelun moneen kertaan ja aikaisempiin tilanteisiin palaamisen, mutta toisaalta se myös rajaa havaintojen ulkopuolelle useita luokan tapahtumia. Kaikki oppilaat eivät näy videolla ja välillä opettajakin käy kameran ulottumattomissa. Oppilaiden välinen keskustelu on tallentunut lähinnä kameran vieressä ja opettajan mikrofonin läheisyydessä. Näin ollen äänimaailmasta on tallentunut videolle vain osa, joten kaikki luokan tapahtumat tai oppilaiden puheenvuorot eivät ole aineistossa mukana. Tutkimuskohteenani oli kuitenkin opettajan ja oppilaiden välinen keskustelu, joten oppilaiden välisen keskustelun puuttuminen ei ole este analyysille.

Tutkielmassani analysoidut oppitunnit liittyvät osaksi suurempaa ongelmanratkaisun opettamisen tutkimusta. Onkin muistettava, että videoitujen oppituntien opettajat ovat valikoituneet mukaan pitkäkestoiseen opetusta tutkivaan projektiin. He ovat osallistuneet ongelmanratkaisun opettamista käsitteleviin tilaisuuksiin ja käyttävät opetuksessaan säännöllisesti erityisesti tätä tarkoitusta varten tehtyjä tehtäviä. Oletettavasti tutkimushenkilöiksi valikoituneet opettajat ovat ainakin jossakin määrin kiinnostuneita matemaattisen ongelmanratkaisun opettamisesta ja opetuksen kehittämisestä. Myös oppilaat ovat harjoitelleet ongelmanratkaisutehtävien ratkaisemista jo aikaisemmin, ja tällöin kokemukset vastaavanlaisista ongelmanratkaisutunneista mahdollistavat sen, että oppilaat pääsivät parin kanssa ratkaisussa alkuun melko lyhyidenkin ohjeiden jälkeen. Oletettavasti opetusryhmien ja opettajien toiminta muuttuu ajan myötä. Ongelmanratkaisuopetusprojektin edetessä oppilaat saavat kokemuksia ongelmien ratkomisesta ja ongelmanratkaisutaidot kehittyvät. Ongelmanratkaisutuntien pitämisen myötä myös opettaja saattaa pohtia, muuttaa ja kehittää opetustaan.

Vaikka olen tehnyt tutkielmani analyysin aineistolähtöisesti, tulkintojeni pohjan muodostaa tietämys matemaattisesta ongelmanratkaisusta ja sen opettamisesta sekä luokkahuonekeskustelun osa-alueista. Teoreettinen perehtyneisyys auttaa kiinnittämään huomion keskeisiin ilmaisuihin ja käsitteisiin sellaisenaan melko strukturoimattomassa aineistossa. Lähestyn ongelmanratkaisun opettamista kokonaisuutena ja pyrin kuvailemaan ilmiötä kattavasti, joten aikaisempi tutkimustieto auttaa hahmottamaan esimerkiksi oppituntien tapahtumien ja ongelmanratkaisuprosessin etenemisen yhteyden.

Tutkielmani tavoitteena oli kuvata mahdollisimman laajasti ja tarkasti opettajan ja oppilaiden välisessä vuorovaikutuksessa ilmenevää matemaattisen ongelmanratkaisun opettamista. Varmastikaan analyysini ei tavoita kaikkia ongelmanratkaisuprosessin ulottuvuuksia tai opetuksen osa-alueita, mutta pyrin muodostamaan opettajan ja oppilaiden välisestä luokkahuonekeskustelusta mahdollisimman kattavan kuvan. Tavoittelin kokonaisvaltaista kuvausta tekemällä aineiston analyysin aineistolähtöisesti niin, että tarkastelun kohteeksi nousevat teemat valikoituivat opettajien ja oppilaiden puheesta ilman ennalta muodostettua luokitusjärjestelmää. Aineiston analyysissä nousseet käsitteet rinnastuvat kuitenkin selvästi matemaattista ongelmanratkaisua ja luokkahuoneen keskustelua kuvailevaan teoreettiseen tietoon. Samankaltaisuus aiempien tutkimusten kanssa vahvistaakin tutkimukseni luotettavuutta.

8 Pohdintaa

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet toteaa, että oppiminen on seurausta oppilaan aktiivisesta ja tavoitteellisesta toiminnasta, jossa hän aiempien tietorakenteidensa pohjalta käsittelee ja tulkitsee opittavaa ainesta. (POPS 2004, 18.) Leppäaho (2007a, 41) esittää, että ongelmanratkaisijalla täytyy olla motivaatiota eli halua löytää ratkaisu ongelmaan. Ongelmatilanteessa ratkaisija yhdistelee aiemmin oppimiaan tietoja uudella tavalla (Pehkonen & Zimmermann 1990, 11). Ongelmanratkaisu on siis tavoitteellista toimintaa, joka edellyttää aikaisemman tiedon hyödyntämistä. Oppiminen ja ongelmanratkaisu näyttäisivät olevan yksilön kannalta samankaltaisia prosesseja. Oppiminen määritelläänkin opetussuunnitelman perusteissa aktiiviseksi ja päämääräsuuntautuneeksi, itsenäistä tai yhteistä ongelmanratkaisua sisältäväksi prosessiksi (POPS 2004, 18). Ongelmien ratkaisemista voisi pitää myös oppimisprosessin harjoitteluna.

Ongelmanratkaisun opettaminen on aiheena laaja, ja päätinkin lähestyä sitä opettajan puheen kautta. Puhuessaan opettajat esimerkiksi kiinnittivät oppilaiden huomion tehtävänantoon, ohjasivat heitä ongelmanratkaisuprosessin vaiheesta toiseen, neuvoivat ongelmanratkaisustrategioiden käytössä, auttoivat oppilaita kertomaan ajatuksistaan ja perustelemaan niitä sekä rohkaisivat ja kannustivat oppilaitaan. Puheensa kautta opettajat antavat oppilaille myös mallin siitä, miten ongelmanratkaisutilanteissa toimitaan. He auttavat oppilaita käymään läpi tarvittavat vaiheet ja siirtymään seuraavaan (Hähkiöniemi ym. painossa). Opettajien esittämät kysymykset olivat usein myös sellaisia, joita ratkaisijan tulisi kysyä itseltään ongelmanratkaisuprosessin eri vaiheissa (esim. Pólya 1945).

Opettajat erosivat toisistaan esittämiensä kysymysten perusteella. Toisten kysymykset ja neuvot liittyivät usein tehtävänantoon ja sen ymmärtämiseen, kun taas osa opettajista kannusti oppilaita selvästi syventämään ajatteluaan ja perustelemaan ratkaisujaan. Näyttäsikin siltä, että opettajat painottavat opetuksessaan ongelmanratkaisuprosessin eri vaiheita. Esimerkiksi Pia ja Tiina ohjasivat oppilaita selittämään toimintaansa ja pohtimaan ongelmaa uusista näkökulmista. Tehtävän ymmärtämisen lisäksi he auttoivat oppilaita käymään läpi ongelmanratkaisuprosessin muita vaiheita.

Etana Elli – tehtävä on avoin ongelma, eikä tehtävänanto edellytä oppilailta jonkin tietyn ratkaisustrategian käyttämistä. Tehtävänannossa kuitenkin määriteltiin erilaiset liikkumisvaihtoehdot etanalle. Lähtötilannetta voidaan pitää avoimena, koska oppilaat saivat itse valita miten ja mistä lähtökohdista tulokseen päästään. Lopputilanne on avoin ja ratkaisu on oikea, kun se täyttää tehtävässä annetut ehdot. (Leppäaho 2007a, 39–40.) Osa opettajista kuitenkin käsitteli oppitunnilla ongelmaa melko rajattuna ja suljettuna: oppilaita ohjattiin käyttämään tiettyä strategiaa, kuten diagrammin piirtämistä. Mahdollisimman monen tavan löytäminen tarkoittikin mahdollisimman monen erilaisen diagrammin tai laskun muodostamista. Toiset opettajista puolestaan ymmärsivät tehtävänannon edellyttävän mahdollisimman erilaisia strategioita ja lähestymistapoja ongelmaan. Oppitunneilla nousi myös esiin tilanteita, joissa oppilaat olivat muokanneet ongelmaa tehtävänannosta poikkeavaksi. Esimerkiksi Sofian oppitunnilla kiinnitettiin huomiota mahdollisuuteen muokata ongelmassa annettuja ehtoja. Oppilaat olivat ratkaisseet ongelman tehtävänannosta poikkeavilla luvuilla ja opettaja totesi tehtävän olevan looginen uusien ehtojen sisällä.

> ”Ei, ei nää oli ne etanan vaihtoehdot. No mut hei katotaan, katotaan mikä olis tällä tullut eli miinus viis vähän niinku meni vähän villiksi. Mutta katotaan onko se looginen sinänsä… Mentiin tämmösten lainalaisuuksien yläpuolelle… Mutta yhtälailla tehtävänanto ois voinut olla, että siinä on tämmösiä erilaisia lukuja… Tää oli tän sisällä oikein.” (Sofia)

On tärkeää erottaa toisistaan oppitunnin vaiheet ja ongelmanratkaisuprosessin eteneminen. Ongelmanratkaisutunneilla oppitunnin rakenne ja oppilaiden ongelmanratkaisuprosessien vaiheet eivät aineistoni perusteella etene aina yhtäaikaisesti. Vaikka tehtävä olisi käyty tarkasti läpi yhdessä tai yksin tunnin alussa, joutuvat monet oppilaista palaamaan takaisin tehtävään tutustumisen vaiheeseen myöhemminkin oppitunnin aikana. Toiset oppilaista saavuttivat ongelmanratkaisuprosessin päätösvaiheen, ratkaisun tarkistamisen ja tarkastelun vaiheen jopa useita kertoja tunnin aikana, jolloin opettajat kannustivat heitä vielä syvällisempään tehtävän ymmärtämiseen tai uudenlaisten strategioiden käyttöön. Toiset oppilaista puolestaan eivät osanneet selittää ajatteluaan tai ratkaisuaan vielä oppitunnin lopussakaan. He kertoivat muille oman, jopa virheellisen, vastauksen, eivätkä selvästikään olleet kovin tarkasti ehtineet pohtia ratkaisunsa toimivuutta. Luokassa oli meneillään samanaikaisesti useita ongelmanratkaisuprosesseja, joiden ohjaamiseen opettaja osallistui luokassa kiertelemällä ja neuvomalla.

Opettamisen ja ohjaamisen lisäksi opettajat toimivat ongelmanratkaisutunneilla myös kuuntelijoina. Oppilaita ymmärtävän ja auttavan opettajan täytyykin kuunnella oppilaitaan ja seurata heidän ajatustensa kulkua (Ahtee ym. 2005, 94–95). Koska tehtävään ei ollut oikeita vastauksia, pyysivät opettajat oppilaita kertomaan ajatuksistaan ja perustelemaan valintojaan. Luokassa kierrellessään opettajat aloittivat keskustelun usein oppilaiden kirjaamien ratkaisuehdotusten pohjalta. He kannustivat oppilaita kertomaan ratkaisuistaan ja auttoivat käyttämään matemaattisia käsitteitä. Matematiikan oppiminen onkin käsitteellisen kielen käyttämistä ongelmanratkaisutilanteissa (Ahtee & Pehkonen 2005, 299). Esittämällä itse kysymyksiä oppilaat puolestaan paljastivat opettajalle, missä vaiheessa ongelman pohtiminen on. Myös tällaisten ohjaustuokioiden lähtökohta oli siinä, miten oppilas oli tehtävää ajatellut ja lähtenyt ratkaisemaan. Opettajan ohjaus olikin lähes aina sidottu oppilaan omaan ajatteluun ja ratkaisuehdotukseen. Tuntien aikana opettajien täytyi usein havainnoida tarkasti työskentelyä, tutkia ratkaisuehdotuksia ja kuunnella oppilasta osatakseen auttaa ja neuvoa. Opettajien rooli oli enemmän aktiivinen kuuntelija ja auttaja kuin tiedon esittäjä. Opettajat ovatkin aikaisemmissa tutkielmissa määritelleet oman roolinsa enemmän ongelmanratkaisuprosessin ohjaajaksi kuin uuden opettajaksi (mm. Sivunen 2007, Kankaanpää 2012).

Tutkielmani tavoitteena oli kuvailla, miten opettaja opettavat ongelmanratkaisua matematiikan tunneilla. Pyrin muodostamaan kuvan siitä, millaista opettajan ja oppilaiden välinen vuorovaikutus on ratkaisuprosessin aikana. Aineistoni muodostavilla oppitunneilla opettajien ohjausta esiintyi ongelmanratkaisuprosessin eri vaiheissa. Opettajat auttoivat oppilaita ymmärtämään tehtävänantoa ja kannustivat palaamaan takaisin sen tietoihin. Muutama opettajista ohjasi oppilaita myös suunnittelemaan ratkaisuprosessiaan. Opettajat kannustivat oppilaita kertomaan ajattelustaan ja pohtimaan ratkaisun onnistumista sekä oppitunnin kuluessa että yhteisissä loppukeskusteluissa. Oppitunneilla kannustettiin käyttämään erilaisia ongelmanratkaisustrategioita, jotka olen koonnut lukuun 6.2. Muodostin aineiston perusteella luokitukset sekä opettajien että oppilaiden esittämistä kysymyksistä. Ongelmanratkaisun opettaminen näyttäytyi oppitunneilla myös kuuntelemisen ja palautteen antamisen kautta.

Tutkimuksen tekemisen aikana nousi esiin myös jatkotutkimusaiheita. Analyysin ulkopuolelle jäi kokonaan oppilaiden välinen keskustelu. Olisi mielenkiintoista selvittää, miten ongelmanratkaisuprosessi ja sen vaiheet näkyvät oppilaiden puheessa ja miten he itse tuovat ajatteluaan ja perusteluita mukaan keskusteluun. Oppilaiden tekemät vastausehdotukset on myös arkistoituna. Olisi kiinnostavaa selvittää, miten oppilaiden vastauksissa näkyy esimerkiksi se, suositteliko opettaja jotakin tiettyä strategiaa vai kannustiko hän oppilaita itse valitsemaan ratkaisutapansa tai miten ajattelua syventävien kysymysten esittäminen ilmenee ratkaisuehdotuksissa. Oppitunneilta on olemassa myös videotallenteita yksittäisten oppilaiden ratkaisuprosesseista. Näitä videoita tarkastelemalla olisi mahdollista selvittää ohjausta, opetusta ja keskustelua yksittäisen oppilaan näkökulmasta. Tässä tutkielmassa opettajan ohjausta tarkasteltiin lyhyesti kolmitasoisen mallin kautta. Jatkotutkimuksessa voisi selvittää tarkemmin, mille tasoille opettajan kysymykset sijoittuvat esimerkiksi ongelmanratkaisuprosessin eri vaiheissa.

> ”Se näytti vaikeelta ja vähän oudolta, mut se olikin aika helppo.” (Pian oppilas)

Lähteet

Aho, L. (1989). Ongelmakeskeisyys ja tieteidenvälisyys ala-asteen opetuksessa. Teoksessa E. Korpinen, E. Tiihonen & P. Tuomi (toim.) *Koulu elämän paikkana: haasteita ja virikkeitä ala-asteen opetukseen.* Jyväskylä: Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisusarja B. Teoriaa ja käytäntöä 34.

Aho, L. (1997). Koulu, opetus ja oppiminen. Teoksessa M.-L. Julkunen (toim.) *Opetus, oppiminen ja vuorovaikutus* (19–38). Helsinki: WSOY.

Ahteen M. & Pehkonen, E. (2005). Kuunteleminen – tärkeä osa kommunikaatiota matematiikan tunneilla. Kasvatus 36 (4), 299-306.

Ahtee, M., Pehkonen, E. Krzywacki, H., Lavonen, J. & Jauhiainen, J. (2005). Kommunikointi luokassa – opetuksen ydin? Teoksessa A. Virta, K. Merenluoto & P. Pöyhönen. *Ainedidaktiikan ja oppimistutkimuksen haasteet opettajankoulutukselle.* Ainedidaktiikan symposium 11.2.2005. (94–100). Turun yliopisto. Kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisuja B 75.

Alasuutari, P. (2011). *Laadullinen tutkimus 2.0.*Tampere: Vastapaino.

Bellack, A. A., Kliebard, H., Hyman, R. & Smith, F. Jr. (1966). *The language of the classroom.* New York; Teachers College. Columbia University.

Bergqvist, K. (2001). Skolarbete som interaktion. Teoksessa S. Lindbland & F. Sahlström (toim.) *Interaktion i pedagogiska sammanhang* (36–52). Stockholm: Liber.

Evaldsson A.-C., Lindblad, S., Sahlström, F. & Bergqvist, K. (2001). Introduction och forskningsöversikt. Teoksessa S. Lindbland & F. Sahlström. *Interaktion i pedagogiska sammanhang* (9–35). Stockholm: Liber.

Flanders, N. A. (1970). Analyzing teaching behavior. Reading, MA: Addison-Wesley.

Haapasalo, L. (1985). *Ongelmakeskeisen matematiikanopetuksen metodiikka*. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Opetusmonisteita 10.

Haapasalo, L. (1997). Ongelmanratkaisun oppimisesta. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (80–98). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Haapasalo, L. (1998). *Oppiminen, tieto & ongelmanratkaisu.* 8. päivitetty painos. Joensuu: Medusa- Software.

Hakulinen, A. (1997). Johdanto. Teoksessa L. Tainio (toim.) *Keskustelunanalyysin perusteet* (13–17). Tampere: Vastapaino.

Harri, R. (2010). *Luokanopettajaopiskelijan matematiikkakuvan ilmeneminen luokkahuonekeskustelussa*. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Pro gradu -tutkielma.

Havu-Nuutinen S. & Järvinen, H. (1997). Ympäristö- ja luonnontiedon opettaminen ja oppiminen ala-asteella. Teoksessa M.-L. Julkunen (toim.) *Opetus, oppiminen ja vuorovaikutus* (135–156). Helsinki: WSOY.

Heinilä, L. (2002). *Analysis of interaction processes in physical education. Development of an observation intsrument, and its application to teacher training and program evaluation.* University of Jyväskylä. Studies in sport, physical eduvation and health 81.

Hirsjärvi, S., Remes, P. & Sajavaara, P. (1997). *Tutki ja kirjoita.* 15. painos. Helsinki: Tammi.

Horppu, R. (1993). *Oppilaiden käsitykset opettajan auktoriteetista erilaisissa luokkailmastoissa.* Helsingin yliopiston sosiaalipsykologian laitoksen tutkimuksia.

Huhtala, S. (1999). *”Mä inhoon tätä matematiikkaa…” Opiskelijan oma matematiikka oppimisvaikeuksien selittäjänä.* Moniste 3/1999. Opetushallitus: Helsinki.

Hähkiöniemi, M. & Leppäaho, H. (2012). Prospective Mathematics Teachers´ Ways of Guiding High School Students in GeoGebra-Supported Inquiry Tasks. The International Journal for Technology in Mathematics Education. 19 (2), 45-57.

Hähkiöniemi, M., Leppäaho, H. & Francisco, J. (painossa). Model for teacher assisted technology enriched open problem solving.

Kankaanpää, A. (2012). *Palasia kokoamalla kokonaisuuteen. Luokanopettajien käsityksiä matemaattisen ongelmanratkaisun opettamisesta*. Kasvatustieteen kandidaatin tutkielma. Helsingin yliopisto.

Karvonen, K. (2007). Puheenvuoro oppilaalle. Teoksessa L. Tainio (toim.*) Vuorovaikutusta luokkahuoneessa: näkökulmana keskustelunanalyysi* (119–138). Helsinki: Gaudeamus.

Keravuori, K. (1988). *Ymmärränkö tarkoitukses: tutkimus diskurssirooleista ja –funktioista.* Helsinki: Suomalaisen Kirjallisuuden Seuran Toimituksia 477.

Kinnunen, R. & Vauras, M. (1997). Matemaattisten ongelmien ratkaisutaito ala-asteella. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (269–282). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Kleemola, S. (2007). Opetajan kysymykset oppitunnilla. Teoksessa L. Tainio (toim.) *Vuorovaikutusta luokkahuoneessa: näkökulmana keskustelunanalyysi* (61–89). Helsinki: Gaudeamus.

Koskenniemi, M. & Hälinen, K. (1970). *Didaktiikka.* Helsinki: Otava.

Koskenniemi, M. (1982). *Yhdessä ja yhteistoimin: Koulu ja sosiaalisuuteen kasvaminen*. Helsinki: Otava.

Kovalainen, M. & Kumpulainen, K. (2009). Discourse-enriched instruction in the mathematics classroom. Analysing collective problem-solving. Teoksessa K. Kumpulainen, C. E. Hmelo-Silver& M. César (toim.) *Investigating classroom interaction. Metodologies in action* (43–72).

LeBlanc, J. F. (1977). You can teach problem solving. Arithmetic Teacher 25 (2), 16–20.

Leino, J. (1997). Konstruktivismi matematiikan opetuksessa. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (39–51). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Leiwo, M., Kuusinen, J., Nykänen, P. & Pöyhönen, M.-R. (1987a). *Kielellinen vuorovaikutus opetuksessa ja oppimisessa I: luokkahuonekeskustelu ja sen kuvaus.* Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisusarja A. Tutkimuksia 2.

Leiwo, M., Kuusinen, J., Nykänen, P. & Pöyhönen, M.-R. (1987b). *Kielellinen vuorovaikutus opetuksessa ja oppimisessa II: Peruskoulun luokkakeskustelun määrällisiä ja laadullisia piirteitä.* Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisusarja A. Tutkimuksia 3.

Leppäaho, H. (2007a). *Matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opettaminen peruskoulussa. Ongelmanratkaisukurssin kehittäminen ja arviointi.* Jyväskylä studies in education, psychology and social research 298.

Leppäaho, H. (2007b). One way to teah mathematial problem solving. Teoksessa T. Berta (toim.) *ProMath 2006, Problem Solving in Mathematics education* (95–108). Wolfgang Kempelen Association of Young Researchers and PhD. Candidates in Slovakia.

Lincoln, Y. S. & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Beverly Hills: Sage publications, Inc.

Lindroos, M. (1997). *Opetusdiskurssiin piirretty viiva: tyttö ja poika luokkahuoneen vuorovaikutuksessa.* Helsingin yliopiston kasvatustieteen laitoksen tutkimuksia 153.

Lyyski, T. (2011*). Liikuntatuntien vuorovaikutusrakenteet opettajan ja oppilaiden välillä*. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Pro gradu -tutkielma.

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. Bristol: Addison-Wesley.

Maunu, M. (2011). *Vuorovaikutusta luokkahuoneessa: opettajien ja oppilaiden toiminta kirjallisuuden opetuksen prosessidraamatunneilla.* Jyväskylän yliopisto. Kielten laitos. Suomen kieli. Pro gradu -tutkielma.

Moses, B. (1982). *Individual differences in problem solving.* Arithmetic Teacher 30 (4), 10–14.

Myhill, D. (2006). Talk, Talk, Talk: Teaching and learning in whole class discourse. Research Papers in Education. 21 (1), 19–41.

Pehkonen, E. (1991). *Probleemakentät matematiikan opetuksessa. Osa 2: Opettajankouluttajien käsityksiä probleemanratkaisun opettamisesta matematiikassa*. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 98.

Pehkonen, E. & Zimmermann, B. (1990). *Probleemakentät matematiikan opetuksessa ja niiden yhteys opetuksen ja oppilaiden motivaation kehittämiseen. Osa 1: Teoreettinen tausta ja tutkimusasetelma.* Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 86.

Pintrich, P. R. & Schlunk D. H. (2002). *Motivation in Education. Theory, Research and Applications*. Upper Saddle river, N. J. : Merrill.

Pólya, G. (1945). *How to solve it. A new aspect of mathematical method* (5. painos). Princeton (NJ): Princeton University Press.

POPS (2004). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004*. Helsinki: Opetushallitus.

Raevaara, L. (1997). Vierusparit – esimerkkinä kysymys ja vastaus. Teoksessa L. Tainio (toim.) *Keskustelunanalyysin perusteet* (75–92). Tampere: Vastapaino.

Repo-Kaarento S. & Levander, L. (2002). Oppimista edistävä vuorovaikutus. Teoksessa S. Lindblom-Ylänne & A. Nevgi (toim.) *Yliopisto- ja korkeakouluopettajan käsikirja* (140–170). Helsinki: WSOY.

Sahlström, F. (2001). Likvärdighetens produktionsvillkor. Teoksessa S. Lindbland & F. Sahlström (toim.) *Interaktion i pedagogiska sammanhang* (91–110). Stockholm: Liber.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. London: Academic Press.

Seedhouse, P. (2004). *The interactional architecture of the language classroom: a conversation analysis perspective*. Oxford: Blackwell.

Sivunen, M. (2007). *Luokanopettajien käsityksiä ongelmanratkaisusta matematiikan opetuksessa.* Kasvatustieteen Pro gradu -tutkielma. Helsingin yliopisto.

Tainio, L. (2007). Miten tutkia luokkahuoneen vuorovaikutusta keskustelunanalyysin keinoin? Teoksessa L. Tainio (toim.) *Vuorovaikutusta luokkahuoneessa: näkökulmana keskustelunanalyysi* (15–58). Helsinki: Gaudeamus.

Tuomi , J. & Sarajärvi, A. (2009). *Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi*. Helsinki: Tammi.

Tynjälä, P. (1991). *Kvalitatiivisten tutkimusmenetelmien luotettavuudesta.* Kasvatus 22 (5–6), 387–398.

Uusikylä, K. & Atjonen, P. (2005). *Didaktiikan perusteet*. Helsinki: WSOY.

Uusikylä, K. (1979). *Miten kuvaan opetustapahtumaa*. Helsinki: Gaudeamus.

Vaulamo, J. & Pehkonen, E. (1999). *Avoimista ongelmatehtävistä peruskoulun yläasteen matematiikassa.* Helsingin yliopisto. Opettajankoulutuslaitoksen tutkimuksia 205.

Vepsäläinen, M. (2007). Opettaja kysyy, oppilas vastaa – vai toisinpäin? Teoksessa L. Tainio (toim.) *Vuorovaikutusta luokkahuoneessa: näkökulmana keskustelunanalyysi* (156–177). Helsinki: Gaudeamus.

Yin, R. K. (1994). *Case Study Research. Design and Methods.* Applied Social Research Methods Series. Volume 5. Newbury Park, CA : SAGE Publications

Yrjönsuuri, R. (1990). *Lukiolaisten matemaattisen ajattelun oppiminen*. Helsingin yliopisto. Opettajankoulutuslaitoksen tutkimuksia 88.

Yrjönsuuri, R. (1997). Matemaattisen ajattelun opettaminen ja oppiminen. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (128–141). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Yrjönsuuri, R. (2007). *Matematiikka mieluisaksi. Psykologinen lähestymistapa opetukseen ja opiskeluun sekä matemaattisen ajattelun osaamisen arviointiin.* Helsinki: Oppilo.