HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

”Mitä me voidaan päätellä siitä säännöstä?”

Opettaja ongelmanratkaisuprosessin reflektointivaiheen ohjaajana

Helsingin yliopisto
Käyttäytymistieteellinen tiedekunta
Opettajankoulutuslaitos
Luokanopettajan koulutus
Pro gradu -tutkielma
Kasvatustiede
Tammikuu 2014
Meira Koponen

Ohjaaja: Anu Laine

HELSINGIN YLIOPISTO

Tiedekunta - Fakultet - Faculty Käyttäytymistieteellinen		Laitos - Institution - Department Opettajankoulutuslaitos
Tekijä - Författare - Author Meira Koponen		
Työn nimi - Arbetets titel ”Mitä me voidaan päätellä siitä säännöstä?” Opettaja ongelmanratkaisuprosessin reflektointivaiheen ohjaajana		
Title ”What can we deduce from the rule?” Teacher as the instructor of the reflection phase in the problem solving process		
Oppiaine - Läroämne - Subject Kasvatustiede		
Työn laji/ Ohjaaja - Arbetets art/Handledare - Level/Instructor Pro gradu -tutkielma / Anu Laine	Aika - Datum - Month and year 02 / 2014	Sivumäärä - Sidoantal - Number of pages 63 s + 1 liite.

Tiivistelmä - Referat - Abstract

Tutkimuksen tavoitteena on tarkastella niitä tapoja, joilla kolme viidennen luokan luokanopettajaa ohjaavat oppilaiden reflektointivaihetta ongelmanratkaisuun keskittyvällä oppitunnilla. Ongelmanratkaisun opettaminen on osa suomalaista opetussuunnitelmaa, mutta aiemmat tutkimukset ovat osoittaneet, että käytännön opetustyössä sen näkyminen on kuitenkin vähäistä. Ongelmanratkaisuprosessia on kuvattu teoriakirjallisuudessa runsaasti (mm. Pólya 1945, Mason 1985, Schoenfeld 1985) ja tässä tutkimuksessa on keskitytty tarkastelemaan varsinaisen ratkaisun löytymisen jälkeen tapahtuvaa oman toiminnan, ratkaisun ja ongelman ns. reflektointivaihetta. Juuri reflektointivaiheessa on mahdollisuus syventää oppilaan matemaattista ymmärtämistä ja ajattelua, hioa havaintoja ja oivalluksia sekä koota ja tiivistää ongelmanratkaisun kannalta keskeiset asiat.

Tutkimus on osa laajempaa Suomen Akatemian rahoittamaa kolmivuotista tutkimusprojektia, jossa projektiin valikoituneet luokanopettajat opettivat oppilailleen ongelmatehtäviä n. kerran kuukaudessa. Tutkimuksessa tarkasteltu ongelmatehtävä oli 17. oppilaille esitelty ongelma. Aineistoon valittiin kolme suomalaista luokanopettajaa pääkaupunkiseudulta. Opettajat käsittelivät 45-minuutin mittaisilla oppitunneillaan tutkimusryhmän toimittamaa ”Labyrintti”-ongelmatehtävää. Oppitunnit videoitiin, litteroitiin ja analysoitiin teorialähtöisesti.

Näytti siltä, että opettajat, joilla oli reflektointivaiheen ohjauksessa tietty tavoite, jota kohti oppilasta ohjattiin, ottivat myös luokan kanssa yhteisesti esille reflektointivaiheeseen liittyvää pohdintaa sekä kokosivat yhteisesti tunnilla tehtyjä havaintoja ja oppilaiden ajatuksia.
Sen sijaan jos opettajalla ei näyttänyt olevan systemaattista päämäärää reflektointivaiheen ohjauksessa, supistui yhteinen pohdinta vain oikeiden vastausten esittämistilanteeksi. Ongelmanratkaisuun keskittyvän oppitunnin laajempi opetuksellinen tavoite näytti tulevan esille myös reflektointivaiheen ohjauksessa. Opettajien voisikin olla hyödyllistä suunnitella ongelmanratkaisun oppituntia reflektointivaiheesta käsin, miettien ensin, mitä olennaisia havaintoja ja osia tehtävästä ja ratkaisusta tulisi ratkaisuprosessin lopussa nostaa tarkasteluun ja pyrkiä ohjaamaan oppilasta kohti ennalta asetettuja tavoitteita.

Avainsanat - Nyckelord
Ongelmanratkaisuprosessi, reflektointivaihe

Keywords
Problem solving process, reflection phase

Säilytyspaikka - Förvaringsställe - Where deposited
Helsingin yliopiston kirjasto, keskustakampuksen kirjasto, käyttäytymistieteet / Minerva

Muita tietoja - Övriga uppgifter - Additional information

UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta - Fakultet - Faculty	Laitos - Institution - Department	
Behavioural Sciences	Teacher Education	

Tekijä - Författare - Author

Meira Koponen

Työn nimi - Arbetets titel

”Mitä me voidaan päätellä siitä säännöstä?” Opettaja ongelmanratkaisuprosessin reflektointivaiheen ohjaajana

Title

”What can we deduce from the rule?” Teacher as the instructor of the reflection phase in the problem solving process

Oppiaine - Läroämne - Subject

Education

Työn laji/ Ohjaaja - Arbetets art/Handledare - Level/Instructor	Aika - Datum - Month and year	Sivumäärä - Sidoantal - Number of pages
Master’s Thesis / Anu Laine	02 / 2014	63 pp. + 1 appendice

Tiivistelmä - Referat - Abstract

The purpose of this thesis was to analyze the instruction in the reflection phase of three fifth grade teachers during a class focusing on solving an open problem.The reflection phase is the last phase of the problem solving process taking place after the solution has been obtained. During the reflection phase there is an opportunity to reflect, review and analyze one’s solution and make generalizations.

This study is a part of a larger research project funded by Suomen Akatemia. The teachers who have volunteered to participate in the study, have taught problems in their classrooms approximately once a month. The problem used in this study, the Labyrinth, was the 17th problem solved by the students during the research project. The data consisted from three videos that were transcribed and analyzed.

It seemed that the teachers who had a specific objective in mind during their instruction, gathered students’ ideas and formulated the results in a systematic manner. However if a clear objective wasn’t detected, the instruction during the reflection phase was only limited. It might be useful for the teacher to plan the problem solving lesson whilst keeping in mind what could be the important issues to bring up during the instruction in the reflection phase.

Avainsanat - Nyckelord

Keywords

Säilytyspaikka - Förvaringsställe - Where deposited

City Centre Campus Library/Behavioural Sciences/Minerva

Muita tietoja - Övriga uppgifter - Additional information

Sisällys

TAULUKOT

KUVIOT

1 Johdanto

Ongelmanratkaisu on ollut osa suomalaista opetussuunnitelmaa jo muutaman vuosikymmenen ajan, mutta sen näkyminen käytännön opetustyössä on edelleen vähäistä (Pehkonen, Hannula & Björkqvist 2007, 121). Ongelmanratkaisua pidetään matemaattisen ajattelun kehittämisen kannalta tärkeänä (mm. Mason, Burton & Stacey 1985; Pehkonen 2001) ja erityisesti avoimien ongelmien kautta voidaan vahvistaa oppilaiden matemaattista ymmärrystä sekä luovuutta (Pehkonen 2001, 15). Silti matematiikan tunnit ovat usein kaavamaisia, eikä tunneilla synny selittämisen, argumentoinnin ja elävien keskustelujen ilmapiiriä (Perkkilä & Lehtelä 2007, 77).

Pehkonen ym. (2007, 129) esittää, että ongelmanratkaisutehtävät ovat opettajille työläitä sekä suunnittelun että ohjauksen näkökulmasta tarkasteltuina. Pólyan (1962) mukaan opettajan tulisi pyrkiä kehittämään oppilaiden kykyä tehdä loogisia päätelmiä sekä tunnistaa ja rohkaista luovaa ajattelua. Opettajan tulisi myös ymmärtää mihin opetuksella pyritään sekä näyttää oppilaille miten ongelmia ratkaistaan. Ongelmanratkaisua ei pitäisi myöskään nähdä muusta matematiikan opetuksesta irrallisena kokonaisuutena tai vain nopeimmille tai edistyneimmille oppilaille tarkoitettuina ”aivopähkinöinä” tai lisätehtävinä. Ongelmanratkaisun opettamisen tulee olla tavoitteellista ja matemaattiseen kontekstiin kytkettyä eikä ongelmia tule antaa oppilaille ymmärtämättä niiden merkitystä ajattelun kehittymisen kannalta (Karp 2009, 128). Opettajat, jotka näkevät ongelmatehtävät pedagogisena välineenä, alkavat myös huomaamaan kytköksiä erilaisten ongelmatehtävien välillä ja näkevät ongelmanratkaisun merkityksen oppilaan matemaattisen ymmärryksen kehittämisessä (mts. 130).

Koska juuri ongelmanratkaisun kautta voidaan kehittää oppilaiden ongelmanratkaisutaitoja ja syventää matemaattista ymmärtämistä (Mason ym. 1985), on tärkeää tutkia ongelmanratkaisuprosessien kulkua, ohjauksen tapoja sekä niitä vaiheita, joissa opettajan ohjauksella on erityisesti merkitystä. Oma tutkimukseni on osa laajempaa Suomen Akatemian rahoittamaa tutkimusprojektia, jossa tarkastellaan kolmen vuoden aikana suomalaisia ja chileläisiä matematiikan opettajia ja heidän ongelmanratkaisuunsa keskittyviä oppitunteja. Sekä Suomessa että Chilessä tutkimusprojektissa mukana olevat opettajat opettavat luokalleen yhdessä valittuja ongelmanratkaisutehtäviä ja nämä oppitunnit videoidaan. Projektissa syntyneitä muita tutkimuksia on mm. Näverin, Ahteen, Laineen, Pehkosen ja Hannulan (2012) tutkimus opettajan tehtävänannon tavoista ongelmanratkaisuun keskittyvällä oppitunnilla.

Mason ym. (1985) esittää, että ratkaisun jälkeen tapahtuvan oman toiminnan reflektoinnin kautta oppilaalla on tilaisuus syventää matemaattista ajatteluaan ja kehittää ongelmanratkaisutaitojaan. Kandidaatintutkielmassani (Koponen 2013) analysoin kahdeksan suomalaisen luokanopettajan ongelmanratkaisutunnin työskentelyvaiheen jälkeisiä yhteisiä luokkakeskusteluja. Shimizun (1999, 110–111) mukaan tehtävän ja sen ratkaisun yhteenveto varsinaisten ratkaisujen löydyttyä, on yksi merkittävä ongelmanratkaisuun keskittyvän oppitunnin osa. Tunnin työskentelyvaiheen aikana tehdyt havainnot ja opitut asiat kootaan opettajan johdolla yhteen ja opettaja pyrkii löytämään oppilaiden kanssa ongelmanratkaisun takana olevan matemaattisen ajatuksen.

Tässä pro gradu–tutkielmassa pyrin tarkastelemaan miten opettajat ohjaavat oppilaitaan ongelmanratkaisuprosessin varsinaisen työskentelyn jälkeisessä vaiheessa. Tässä tutkimuksessa ko. vaiheesta käytetään nimitystä reflektointivaihe. Reflektointivaiheen ohjaukseen voi sisältyä luokan yhteinen luokkakeskustelu, jossa tehtävää ja sen ratkaisua pohditaan yhdessä, sekä yhden oppilaan tai pienen oppilasryhmän toimintaan keskittyvä ohjaus, kun varsinainen ratkaisu ongelmaan on jo löytynyt.

2 Ongelmanratkaisu matematiikassa

Ongelmanratkaisu ja erityisesti avoimien ongelmien parissa työskentely on matemaattisen ajattelun kehittymisen kannalta tärkeää (mm. Mason ym. 1985, Pehkonen 2001, 15). Pólyan (1962) mukaan ongelmanratkaisu on käytännön taito, jota voi kehittää harjoittelemalla eli ratkaisemalla ongelmia.

Ongelmanratkaisu liitetään Perusopetuksen opetussuunnitelmassa (2004, 19; 31) yleisesti opetuksen lähtökohdaksi ja matematiikan lisäksi myös muihinkin oppiaineisiin. Arkielämän ongelmanratkaisutilanteet ovat kouluympäristössä ratkaistavia ongelmatehtäviä vähemmän strukturoituja ja ne vaativat ongelmaan liittyvien ehtojen tunnistamista ja määrittelyä sekä resurssien ja strategioiden valitsemista (Singer & Voica 2012, 10). Koulumatematiikan tulisikin antaa oppilaille nykyistä monipuolisemmat tiedot ja taidot ongelmatilanteiden tunnistamiseksi, rakentamiseksi ja ratkaisemiseksi (Singer & Voica 2012, 10; Lesh & Zawojewksi 2007, 764)

Tässä luvussa esitellään matemaattisen ongelmanratkaisun kannalta keskeisiä määritelmiä sekä tunnetuimpia ongelmanratkaisumalleja, joiden avulla määritellään oppilaan ongelmanratkaisuprosessin reflektointivaihe.

2.1 Matemaattinen ongelmanratkaisu

Ongelmanratkaisulla tarkoitetaan sekä ongelman varsinaista ratkaisua että kaikkia niitä ajattelun ja työskentelyn vaiheita, joita oppilas tekee löytääkseen ongelmaan ratkaisun ja tutkiessaan ratkaisuaan sen jo löydyttyä (mm. Pólya 1945; Mason ym. 1985; Haapasalo 1998). Ongelmanratkaisussa pyritään ongelmanasettelusta ratkaisuun yhdistelemällä jo olemassa olevaa tietoa uuteen esimerkiksi jo aiemmin opittujen ratkaisustrategioiden avulla, kunnes löydetään sellainen tietojen ja strategioiden yhdistelmä, joka tuottaa halutun ratkaisun (Haapasalo 1998, 25; Gagné 1970, 214). Leppäaho (2007, 42) kuvaakin ongelmanratkaisua ratkaisijan ajatteluprosessiksi.

Matemaattiseen ongelmanratkaisuun liittyvät ongelmat ovat yksilöllisiä – ratkaisijasta riippuvaisia ja sidottuja aikaan (Haapasalo 1998, 17). Gagné (1970, 214) kuvailee ongelmanratkaisuksi tilannetta, jossa ratkaisija on sellaisessa ongelmatilanteessa, jossa hän joutuu yhdistelemään ja soveltamaan aiemmin opittua tietoa uudella tavalla ratkaisua etsiessään. Soveltaessaan aiemmin opittua uuteen tilanteeseen ratkaisun löytämisen lisäksi ratkaisija oppii jotain uutta. Gagné (1970, 216) pitääkin ongelmanratkaisua yhtenä oppimismuotona. Haapasalo (1998, 17) lisää määritelmään myös vaatimuksen motivaatiosta sekä sitoo sen aikaan. Tällöin tietty tilanne voi olla tietylle henkilölle, määrätyssä hetkessä ongelma, vain jos sen ratkaisija ei havaitse välittömästi ratkaisuun vaadittavia keinoja ja jos ongelmatilanne aiheuttaa ratkaisijassaan juuri sillä hetkellä tietoista ja ratkaisuun tähtäävää ajattelutoimintaa. Koska ongelmanratkaisuprosessi on yksilöllinen, ongelman määrittelykin on ratkaisijasta riippuvainen. Jos ratkaisijalla on valmiiksi tiedossa ongelman ratkaisuun vaadittava menetelmä, ongelma lakkaa olemasta ongelma. Tehtävä, joka yhdelle on ongelma, voi toiselle olla pelkkä rutiinitehtävä. (Haapasalo 1998, 17.)

Ongelmia voidaan luokitella esimerkiksi niiden syntymisen ja esiintymisen, laadun ja muodon tai niiden ratkaisuun tarvittavien menetelmien mukaan (Haapasalo 1998, 37). Ongelmat voidaan luokitella myös avoimiin ja suljettuihin ongelmiin niiden alku- ja lopputilanteiden perusteella (ks. taulukko 1) (Haapasalo 1998; Pehkonen 1997).

Taulukko 1: Avoimen ja suljetun ongelman määrittely (Pehkonen, 1997, 9)

Lopputilanne / **Alkutilanne**	**Suljettu** (ts. tarkasti määritelty)	**Avoin**
Suljettu (ts. tarkasti määritelty)	**Suljettu ongelma** – *sekä lähtö- että lopputilanne tarkasti määritelty.* *esim. mekaaniset laskut*	**Avoin ongelma** – *lähtötilanne suljettu, lopputilanne avoin.* *esim.* *todellisen elämän ongelmat, tutkimustehtävät, probleemakentät, ongelmien varioiminen*
Avoin	**Avoin ongelma** – *lähtötilanne avoin, lopputilanne suljettu.* *esim. todellisen elämän ongelmat, ongelmien varioiminen*	**Avoin ongelma** – *lähtö- ja lopputilanne avoimia.* *esim. todellisen elämän ongelmat, projektit, ongelmien varioiminen, omien ongelmien kehittäminen*

Suljetuissa ongelmissa sekä alku- että lopputilanne ovat tarkasti määriteltyjä, eivätkä tehtävät yleensä sisällä ylimääräistä tietoa. Suljettujen tehtävien ratkaisut ovat yleensä ennalta tiedossa (Haapasalo 1998, 45). Pehkosen (1997, 8) mukaan koulumatematiikassa tarkastellaan tavallisesti suljettuja ongelmia tai yleisimmin suljettuja tehtäviä. Suljetuissa tehtävissä oppilaiden tulee useimmiten vain tietää, mitä sääntöä tai menetelmää soveltaa, eivätkä ne anna oppilaalle juurikaan mahdollisuuksia luovaan ajatteluun (mp.).

Avoimeksi ongelmaksi kutsutaan sellaista ongelmaa, jolta puuttuu joko alku- tai lopputilanne tai molemmat. Jos ongelman lopputilanne on avoin, ei siihen ole olemassa vain yhtä oikeaa vastausta, vaan ratkaisu on oikein, kunhan tehtävässä annetut alkuehdot on täytetty (Leung 1997, 28). Jos ongelman lähtötilannetta ei ole tarkasti määritelty, lähtötilanne on avoin. Tällöin ratkaisija valitsee itse mitä näkökulmia valitsee tutkittavaksi (mp.). Ongelma on avoimimmillaan, kun sekä alku- että lopputilanne ovat avoimia, esimerkiksi tilanteessa, jossa ratkaisija saa itse rakentaa ongelman sekä ratkaista sen haluamallaan tavalla. (Leppäaho 2007, 39.) Pehkonen (1997, 8) määritteleekin termin ”avoin ongelma” yläkäsitteeksi monenlaisille ongelmatyypeille: tutkimukset, probleemakentät, ongelmat ilman kysymystä, ”todellisen elämän” ongelmat, jne. Avoimien ongelmien parissa työskennellessä ratkaisija voi valita mitä näkökulmia valitsee ratkaistavaksi, hän voi edetä ratkaisuun useilla eri tavoilla ja lisäksi ongelmaan voi olla useita erilaisia vastauksia (Hähkiöniemi, Leppäaho & Francisco 2012). Verrattuna hyvin määriteltyihin ja rajattuihin suljettuihin ongelmiin avoimissa ongelmissa lähtötilanne voi olla epämääräisesti rajattu ja mukana voi myös olla harhaanjohtavaa, ylimääräistä tai epäolennaista tietoa (Haapasalo 1998, 45).

Ongelman ratkaisuprosessi on avoin silloin, kun ongelmaan on useita ratkaisumenetelmiä (Hähkiöniemi ym. 2012). Avoimen ongelman ratkaisuun tarvitaan valituista tai annetuista alkuehdoista tai hypoteesista loogisesti etenevä, hyvin määritelty matemaattisten operaatioiden polku, jonka avulla ratkaisija pääsee ongelman asettelusta haluttuun ongelman ratkaisuun (Pólya 1962, 123).

2.2 Reflektointivaihe ongelmanratkaisumalleissa

Monet ongelmanratkaisumallit pyrkivät kuvaamaan ongelmanratkaisuprosessin kulkua ja antamaan samalla ohjeita ongelman ratkaisijalle (ks. esim. Dewey 1910, Pólya 1945, Mason ym. 1985, Schoenfeld 1985, Hähkiöniemi ym. 2012). Tähän lukuun on valittu sellaisia ongelmanratkaisumalleja, joissa on huomioitu työskentelyvaiheen jälkeinen ongelman ja ratkaisun käsittely. Ongelmanratkaisumalleissa käytetään vaihtelevia termejä kuvaamaan varsinaisen ratkaisun jälkeistä työskentelyä (mm. ratkaisun analysointivaihe, lopputarkastelu, tarkistaminen ja yhteenveto jne.) (ks. esim. Pólya 1945; Mason ym. 1985; . Schoenfeld 1985). Tässä työssä kyseisestä ongelmanratkaisuprosessin vaiheesta käytetään nimitystä reflektointivaihe. Boud, Keogh ja Walker (1985) ovat kuvanneet reflektioprosessia aktiivisena prosessina, jossa palautetaan kokemuksia ja kokemuksen herättämiä tunteita mieleen käsiteltäviksi. Kokemuksia pyritään arvioimaan kriittisesti ja kokonaisvaltaisesti. Uudelleenarviointi voi synnyttää uusia ajatuksia ja näkökulmia, joita voidaan soveltaa käytäntöön (mts. 10–11).

Pólyan ongelmanratkaisumalli

Yksi modernin ongelmanratkaisun tunnetuimmista malleista lienee Pólyan (1945) neliportainen ongelmanratkaisumalli, jossa yhdistyvät sekä ongelmanratkaisuprosessin kuvaus että käytännön etenemisohjeet kysymyksineen. Pólyan malli on ollut monen ongelmanratkaisumallin pohjana, vaikkakin sitä on kritisoitu sen liian lineaarisesta luonteesta (Leppäaho 2007, 54).

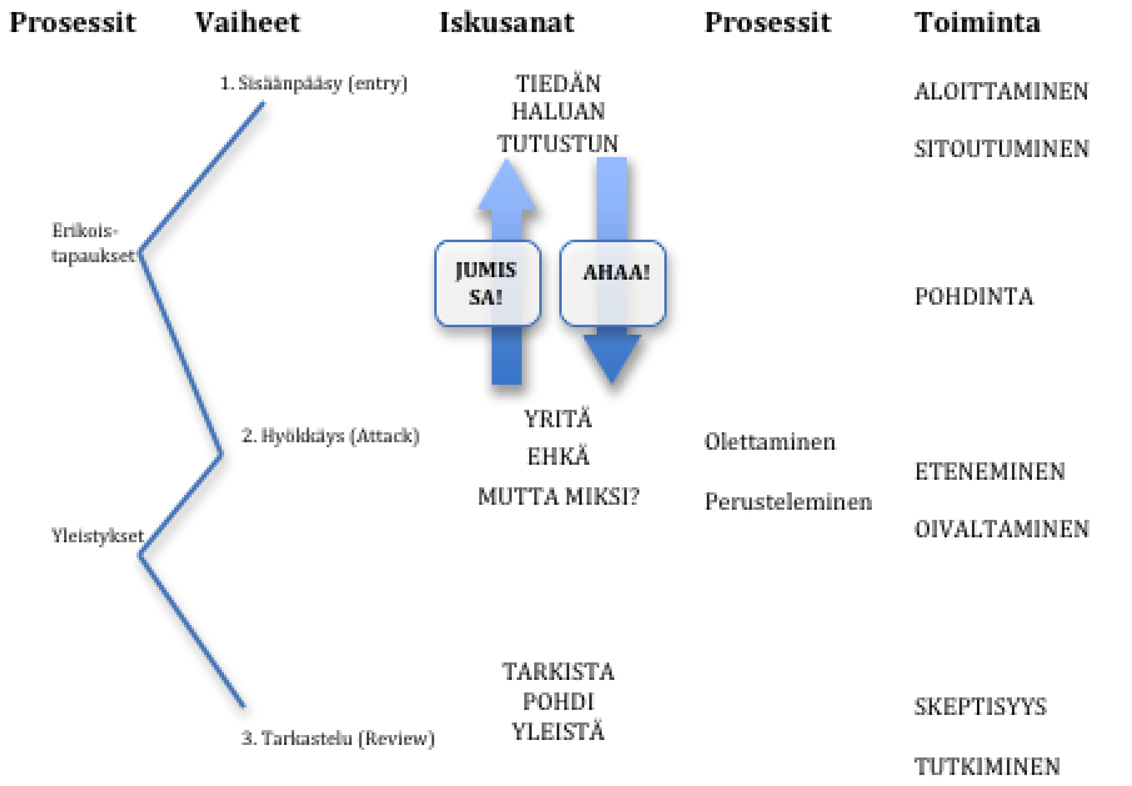
Pólyan mallissa ongelmanratkaisun *ensimmäinen vaihe* on ongelman ymmärtäminen ja huolellinen tutustuminen ongelman alkuasetelmaan **(**Pólya 1945, 6–7). *Toisessa vaiheessa* ratkaisija laatii ratkaisusuunnitelman. Ratkaisusuunnitelma saattaa syntyä vähitellen, yrityksien ja erehdysten kautta ja se vaatii ratkaisijalta pitkäjänteisyyttä ja keskittymistä. (mts. 8–12.) *Kolmannessa* vaiheessa ratkaisija toteuttaa suunnitelmansa. Kolmannen vaiheen lopussa Pólyan ideaalitilanteessa ratkaisija on vakuuttunut jokaisen läpikäydyn askeleen virheettömyydestä ja hän voi esittää ratkaisuun johtavat huolellisesti määritellyt ja muotoillut askeleet ja päätelmät. (mts. 12–14.) Pólyan ongelmanratkaisuprosessin viimeinen, eli *neljäs vaihe* saattaa jäädä monilta ratkaisijoilta kokonaan välistä. Ongelman selvittyä on jäljellä kuitenkin vielä tärkeä osa prosessia: prosessin tulkinta ja palaute eli reflektointivaihe. Juuri tässä viimeisessä vaiheessa on Pólyan mielestä mahdollista oppia erityisesti juuri ongelmanratkaisua. Ongelma ei ole koskaan täysin ratkaistu, vaan siitä löytyy aina uusia näkökulmia tutkittavaksi. Viimeinen vaihe korostaa itse ongelmanratkaisuprosessin tärkeyttä kokonaisuutena – tärkeintä ei ole päämäärä vaan matka. (mts. 14–15.)

Pólya (1945, 14–15) painottaa, että juuri reflektointivaiheessa ratkaisija näkee oman toimintansa kokonaisuutena ja pystyy tarkkailemaan ja havainnoimaan ratkaisujaan. Ratkaisija myös näkee oman ratkaisunsa kokonaisuutena, pystyy analysoimaan tekemiään ratkaisuja, näkee ajattelunsa virheet ja väärät polut sekä liittää ongelman suurempaan matemaattiseen viitekehykseen. Ongelmanratkaisun viimeisessä vaiheessa voidaan saavuttaa Pólyan mukaan todellista ymmärrystä ongelmanratkaisuprosessista (mp.).

Masonin ongelmanratkaisumalli

Masonin (1985) ongelmanratkaisumallissa näkyy Pólyan mallia selkeämmin ajatus ongelmanratkaisuprosessin syklisyydestä: ratkaisuvaiheessa ratkaisija saattaa kokeilla erilaisia ratkaisumalleja ja lähestymistapoja ja joutua palaamaan alkuun useamman kerran ratkaisun aikana.

Masonin ongelmanratkaisumalliin (ks. kuvio 1) sisältyy kolme vaihetta: *sisäänpääsy (entry), hyökkäys (attack) ja tarkastelu (review).* Masonin malliin sisältyy myös ns. iskusanojen käyttö, joiden avulla ratkaisija ohjaa ratkaisuaan. (Mason ym. 1985, 28.)



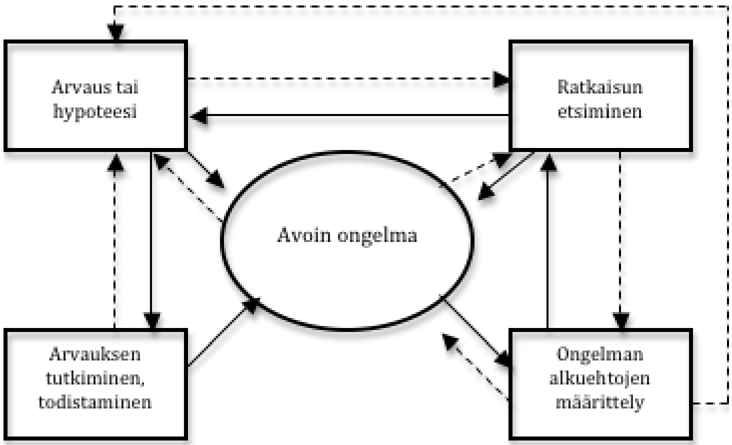
Kuvio 1 Masonin (1985, 131) ongelmanratkaisumalli

Sisäänpääsyvaiheessa ratkaisija tutustuu ongelmaan ja valmistautuu tehokkaaseen hyökkäykseen. Ratkaisija määrittelee ongelman tarkemmin: mitä tiedän, mitä haluan tietää ja mitä apuja saatan tarvita hyökkäyksessä (esim. diagrammit ja havainnollistavat kuvat). (Mason ym. 1985, 28–29.) *Hyökkäysvaiheeseen* ratkaisija etenee kun hän on ymmärtänyt ongelman, sen ehdot ja on motivoitunut yrittämään sen ratkaisua. Ongelman ratkaisuvaiheessa ratkaisija esittää arvauksia ja testaa niitä. Olennaisia vaiheita ratkaisussa ovat oivallukset (AHAA!) ja jumissa oleminen (JUMISSA!). Hyökkäysvaihe loppuu, kun ongelma on ratkaistu tai hylätty. (mts. 38–39.) Lopuksi reflektointivaiheessa tutkitaan omaa ratkaisuprosessia omien ajattelutaitojen kehittämiseksi. Tässä vaiheessa sekä tarkistetaan ratkaisu sekä reflektoidaan tärkeitä kohtia, esimerkiksi oivalluksia tai jumiutumisen syitä. Reflektointivaiheessa myös laajennetaan ratkaisua ja yleistetään sitä laajempaan kontekstiin. (mts. 39–42.)

Masonin mallissa reflektointivaiheessa nostetaan esille kolme vaihetta: ratkaisun tarkistaminen, reflektointi ja laajentaminen. Ratkaisun tarkistuksessa varmistetaan laskujen oikeellisuus ja ns. huolimattomuusvirheet sekä tehtyjen hypoteesien loogisuus. Paras keino ratkaisun tarkistamiseen ei Masonin mukaan kuitenkaan ole omien askelien seuraaminen, vaan uuden lähestymistavan keksiminen. Kun ratkaisija on saavuttanut vastauksen, hän saattaa keksiä uusia, helpompiakin ratkaisutapoja ongelmaan. Jos ratkaisija pääsee samaan tulokseen useita eri reittejä, hän voi olla varmempi ratkaisunsa oikeellisuudesta. (Mason ym. 1985, 40–41.) Ratkaisuprosessin reflektoinnissa on mahdollisuus oppia omista oivalluksista ja virheistä ja näin kehittää matemaattista ajattelua. Reflektoinnissa on tarkoitus pohtia ratkaisun kannalta olennaisimpia ajatuksia ja hetkiä. Yleistämällä ja laajentamalla ratkaisua ratkaisija voi nähdä ongelman laajemmassa kontekstissa. (mts. 42.) Muuttamalla ongelman alkuehtoja ratkaisija voi tutkia niiden vaikutusta ratkaisunsa kulkuun. Kaikkein mielenkiintoisimmat ongelmat ovat ratkaisijasta itsestään lähtöisin. Laajentamalla alkuperäistä ongelmaa ratkaisija keksii itse omia, uusia ongelmia ratkaistavaksi. (mts. 44.)

Avoimien ongelmien ongelmanratkaisumalli

Hähkiöniemi, Leppäaho ja Francisco (2012) ovat tutkineet oppilaiden ongelmanratkaisuprosesseja heidän työskennellessään avoimien ongelmien parissa. Kuviossa 2 esitellään avoimien ongelmien ratkaisua mallintava ongelmanratkaisumalli. Ongelmanratkaisutilanne alkaa ratkaisijan huomatessa ongelmatilanteen. Optimaalisessa ratkaisuprosessissa, joita havainnollistetaan yhtenäisin viivoin, ratkaisija rajaa ongelman ja päättää, mitä haluaa ongelmasta tutkia. Ratkaisija etenee ratkaisussaan kehittelemällä ja kokeilemalla erilaisia ratkaisuvaihtoehtoja, joista hän alkaa hahmottamaan arvausta tai hypoteesia. Hän tutkii arvauksensa todenmukaisuutta tai pyrkii todistamaan hypoteesinsa, jonka jälkeen hän palaa avoimeen ongelmaan ja valitsee toisen näkökulman ongelman tutkimiseen. (Hähkiöniemi ym. 2012.)



Kuvio 2: Avoimen ongelmien ongelmanratkaisumalli (Hähkiöniemi, Leppäaho & Francisco 2012)

Ongelmanratkaisuprosessi on harvoin kuitenkaan suoraviivaisesti etenevä prosessi. Kuviossa 2 katkoviivoilla havainnollistetaan vaihtoehtoisia reittejä, joita oppilaiden havaittiin käyttävän ongelmanratkaisuprosessinsa aikana. Ongelman ratkaisija saattaa ratkaisuvaihtoehtoja tutkittuaan palata takaisin alkuehtojen asettamiseen. Voi myös olla, että ratkaisija ei käy läpi kaikkia vaiheita, vaan saattaa esimerkiksi hyväksyä tehdyn arvauksen ilman perusteluita ja siirtyä tutkimaan uusia näkökulmia ongelmasta. (Hähkiöniemi ym. 2012.)

Ongelmanratkaisumallin on tarkoitus kuvata kouluympäristössä tapahtuvaa ongelmanratkaisuprosessia, eikä siinä ole esimerkiksi Pólyan mallissa olevaa ratkaisusuunnitelman laatimista. Hähkiöniemi ym. (2012) argumentoi, että tavallisella oppitunnilla oppilaat eivät useinkaan ongelmaa ratkaistessaan laadi ratkaisusuunnitelmaa. Sen sijaan malli korostaa syklistä liikettä eri ongelmanratkaisun vaiheiden välillä. Vaikka mallissa ei erityisesti ole oman työskentelyn reflektointivaihetta, se kuitenkin havainnollistaa sen, ettei ongelmanratkaisuprosessi etene vaihe vaiheelta suoraviivaisesti, vaan ongelman ratkaisija liikkuu tarvittaessa sujuvasti eri vaiheiden välillä tai jättää joitain vaiheita pois. Lisäksi mallissa oppilas ei hylkää tehtävää löydettyään ratkaisun vaan palaa ongelmaan ja jatkaa sen parissa työskentelyä.

Yhteenveto ongelmanratkaisuprosessin reflektointivaiheesta

Pólyan (1945) ja Masonin (1985) ongelmanratkaisumalleissa kuvataan ratkaisijan näkökulmasta ongelmanratkaisuprosessin vaiheita. Molemmissa malleissa on yhteistä sekä ongelmaan tutustuminen ja sen määrittely että työskentelyvaiheen jälkeinen reflektointivaihe, jossa ratkaisija arvioi ratkaisuun ja ratkaisuprosessin kulkua. Pólyan malliin sisältyy runsaasti ratkaisun eri vaiheissa työskentelyä ohjaavia kysymyksiä, joiden avulla ratkaisija voi edetä seuraavaan vaiheeseen. Mason ottaa mallissaan huomioon sen, ettei ongelmanratkaisu välttämättä ole niin suoraviivaista kuin Pólyan malli antaa ymmärtää ja painottaa hyökkäysvaiheessa tapahtuvaa kokeilemista ja tarvittaessa palaamista takaisin valmistelemaan uutta yritystä.

Avoimien ongelmien ongelmanratkaisumalli (Hähkiöniemi ym. 2012) tuo optimaalisen ongelmanratkaisureitin rinnalle vaihtoehtoisia ongelmanratkaisureittejä. Siinä huomioidaan sujuva liikkuminen eri vaiheiden välillä sekä myös se, että ratkaisija saattaa jättää jotain ongelmanratkaisuprosessin vaiheita kokonaan pois. Oman työskentelyn reflektointia voi siis tapahtua myös työskentelyvaiheen aikana, eikä pelkästään valmiin ratkaisun esittämisen jälkeen.

Masonin (1985) mukaan ratkaisija ei välttämättä itse osaa orientoitua reflektointivaiheeseen vaan ajattelee ongelmanratkaisun olevan ohitse kun ainakin yksi vastaus on löytynyt. Hähkiöniemenkin ym. (2012) tutkimuksessa osa oppilaista ei jatkanut ensimmäisen arvauksensa työstöä, vaan hyväksyivät sen vastaukseksi. Reflektointivaihe tulisikin aktiivisesti nostaa tarkasteluun. Pólyan (1945) ja Masonin (1985) ongelmanratkaisumalleissa on esitetty runsaasti erilaisia kysymyksiä, jotka ohjaavat ratkaisijan reflektointivaihetta. Näiden ongelmanratkaisumallien reflektointivaiheeseen liittyvät kysymykset on luokiteltu taulukossa 2 kolmeen pääluokkaan: ratkaisun tarkastelu, ajatteluprosessi sekä ongelman jatkotutkimukset. Ratkaisun tarkastelussa ratkaisija harjaantuu tarkistamaan omaa työtään ja palaa ajattelussaan takaisin ongelman alkuehtoihin, joiden mukaan muotoilee vastauksensa. Ajatteluprosessin reflektoinnissa pohditaan sekä käytettyjä strategioita että ongelmanratkaisuun liittyviä kompastuskiviä: jumissa olemista, vaikeita kohtia ja virheiden sietämistä. Ongelman jatkotutkimukset– luokka koostuu kysymyksistä, joiden avulla ratkaisijaa ohjataan yleistämään ratkaisustrategiaa tai ratkaisua ja pohtimaan samankaltaisten ongelmien suhdetta toisiinsa ja näin liittämään ongelmaa laajempaan matemaattiseen kontekstiin.

Taulukko 2: Reflektointivaiheen pääluokat ja reflektointia ohjaavia kysymyksiä (Pólya 1945, Mason 1985).

Ratkaisun tarkastelu	Ajatteluprosessi	Ongelman jatkotutkimukset
- Ovatko laskutoimitukset oikein? - Ovatko kaikki ratkaisun vaiheet oikein? - Ovat tehdyt johtopäätökset loogisia? - Vastataanko siihen, mitä kysyttiin? - Onko kaikki ongelman asettamat ehdot täytetty? - Onko ratkaisu järkevä? - Onko ratkaisu esitetty selkeästi suhteessa ongelmaan?	- Mitä vaikeita kohtia ratkaisussa oli? - Minkälaisia oivalluksia ratkaisun aikana esiintyi? - Jäitkö jumiin? - Löydätkö muita ratkaisutapoja? - Onko löydetty ratkaisu paras mahdollinen - Voisiko jälkikäteen nähdä, miten tulokseen voidaan päästä helpommin?	- Minkälaisissa ongelmissa ratkaisustrategiaa voisi käyttää? - Voidaanko ratkaisua yleistää koskemaan laajempaa kontekstia? - Miten ratkaisu muuttuu, jos alkuperäisiä ongelman ehtoja muutetaan? - Minkälaisia omia ongelmia nousee alkuperäisestä ongelmasta tai ratkaisusta?

Taulukkoon 2 kerätyt pääluokat ja kysymykset antavat kuvan ongelmanratkaisumalleissa kuvatun reflektointivaiheen sisällöistä. Ongelman ratkaisijan tulisi ongelmanratkaisumallien mukaan reflektointivaiheessa pysähtyä pohtimaan systemaattisesti näitä kolmea pääluokkaa ja harjaantua tutkimaan ongelmaa, omaa ratkaisua ja siihen johtanutta ajatteluprosessia sekä työskentelyvaihetta.

3 Matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opettaminen

Avoimien ongelmien parissa työskentely muodostaa tärkeän työkalun koulumatematiikan opetuksessa, sillä avoimen ongelmanratkaisun on yleisesti todettu kehittävän matemaattista ymmärrystä ja luovuutta (Pehkonen 2006, 125). Matemaattisen ongelmanratkaisun opettaminen ei ole kuitenkaan pelkästään ratkaisustrategioiden opettamista, ja pelkkien strategioiden opettaminen ei Schoenfeldin (1992, 52) mukaan ole tuottanut toivotunlaisia tuloksia ongelmanratkaisutaitojen kehittymisessä. Lesh ja Zawojewski (2007, 763) pitävätkin tärkeinä opettaa spesifisten ratkaisustrategioiden lisäksi metakognitiivisia strategioita sekä pyrkiä vaikuttamaan oppilaiden negatiivisiin käsityksiin ja vahvistaa samalla positiivista suhtautumista ongelmanratkaisuun ja matematiikkaan. Haapasalon (1998) mukaan ongelmanratkaisun opettamisen sijaan pitäisikin puhua ongelmanratkaisutaitojen kehittämisestä.

Ongelmanratkaisun opettaminen tai ongelmanratkaisutaitojen kehittäminen on monimuotoinen prosessi (Leppäaho 2007, 69). Ongelmanratkaisun opettamista voidaan kuitenkin jaotella erilaisiin lähestymistapoihin. Schroeder ja Lester (1989, 32–33) ovat jaotelleet ongelmanratkaisun opettamisen kolmeen lähestymistapaan: opetetaan ongelmanratkaisua, opetetaan ongelmanratkaisua varten ja opetetaan ongelmanratkaisun kautta. Opettaja voi siis opettaa ongelmanratkaisua eli miten ongelmia ratkaistaan mm. havainnollistamalla oppilaille ongelmanratkaisun eri vaiheita ja ratkaisussa käytettäviä ratkaisustrategioita. Lisäksi voidaan opettaa ongelmanratkaisua varten opettamalla oppilaille tietoja ja taitoja, joita he voivat hyödyntää ongelmatehtävissä. Ongelmanratkaisun kautta voidaan opettaa myös matemaattisia sisältöjä. (mp.)

Luvussa 3.1 esitellään ongelmanratkaisussa tarvittavia ongelmanratkaisutaitoja, joita opettajan tulisi huomioida ongelmanratkaisuun keskittyvällä oppitunnilla. Luvussa 3.2 keskitytään opettajan rooliin ongelmanratkaisun ohjaajana ja oppitunnin suunnittelijana ja luvussa 3.3 esitellään opettajan roolia erityisesti reflektointivaiheen ja yhteisen tehtävän ratkaisun yhteenvedon ohjaajana.

3.1 Ongelmanratkaisutaidot ja niihin vaikuttavat osa-alueet

Lester ja Kehle (2003, 507) tiivistivät hyvän ongelmanratkaisijan ominaisuuksia seuraavasti: 1. hyvillä ongelmanratkaisijoilla on hyvät matemaattiset pohjatiedot, jotka ovat rakentuneet ja linkittyneet toisiinsa monipuolisesti, 2. hyvät ratkaisijat osaavat kiinnittää huomion ongelmassa ns. pintaa syvemmälle, 3. hyvät ratkaisijat ovat muita ongelmanratkaisijoita tietoisempia omista heikkouksistaan ja vahvuuksistaan ongelmanratkaisijoina, 4. hyvät ratkaisijat osaavat säädellä ja tarkkailla muita paremmin omia ratkaisuyrityksiään, 5. hyvät ratkaisijat haluavat muita ratkaisijoita enemmän saavuttaa ns. elegantteja matemaattisia ratkaisuja. Schoenfeld (1985, 15) on lisäksi listannut viisi menestyksekkään ongelmanratkaisijan taitoa: ratkaisijan resurssit (esim. proseduraalinen tieto), heuristiikat eli ratkaisustrategiat, kontrolli, uskomukset ja käytänteet. Hyvälle ongelmanratkaisijalle on siis ominaista matematiikan perustaitojen hallinta, jolloin resursseja vapautuu varsinaiseen ongelmanratkaisuun, oman toiminnan säätelyn taidot, ns. metakognitiiviset taidot, tiedot erilaisista ratkaisustrategioista eli heuristiikoista ja niiden käytöstä, käsitykset itsestä ongelmanratkaisijana sekä luottamus omiin taitoihin ja onnistumiseen ongelmanratkaisuprosessissa (mp).

Ongelmanratkaisutaitojen kehittymiseen vaikuttaa siis oppilaan ymmärrys matematiikasta, matemaattiset perustaidot ja niiden linkittyminen toisiinsa. Lisäksi oppilaan tulisi hallita sekä metakognitiivisia strategioita että varsinaiseen ratkaisuun liittyviä ratkaisustrategioita eli heuristiikkoja. Lisäksi merkitystä on myös oppilaan asenteilla ja uskomuksilla itsestään, matematiikasta ja ongelmanratkaisusta. (Schoenfeld 1985, 44–45.) Ongelmanratkaisutaitoihin vaikuttavat osa-alueet onkin seuraavaksi jaettu kolmeen kategoriaan: **ongelmien matemaattiseen sisältöön ja kontekstiin** liittyvät tiedot ja taidot, **strategioihin liittyvä tieto** (sekä metakognitiiviset että varsinaiseen ratkaisuun liittyvät strategiat) ja **oppilaan uskomukset ja asenteet**. Vaikka matemaattiset sisällöt ja konteksti esitellään ongelmanratkaisustrategioista erillisinä lukuina, tulee kuitenkin huomata, että ongelmanratkaisun osa-alueet eivät ole toisistaan tai isommista matemaattisista sisällöistä irrallisia. Ongelmanratkaisun opettamista ei voi myöskään lähestyä niin, että opetetaan ensin käsitteitä, sitten helppoja strategioita ja yksinkertaisia ongelmia, joiden avulla oppilas mekaanisesti toistaa opittuja asioita. (Lesh & Zawojewski 2007, 765.) Ongelmanratkaisuun liittyy olennaisesti myös keksimisen ja oivalluksen sekä luovuuden elementit (Mason ym. 1985, 127) ja ongelmanratkaisun strategiat ja sisällöt ovat toisiinsa sekä suurempiin matemaattiseen sisältöihin kytkeytyneitä (Lesh & Zawojewski 2007, 765).

Ongelmanratkaisun matemaattinen sisältö ja konteksti

Schroederin ja Lesterin (1989, 33) mukaan ongelmanratkaisua voidaan lähestyä opetuksessa opettamalla jotain matemaattista sisältöä ongelmanratkaisun kautta. Tällöin opetukseen valitaan haluttua matematiikan sisältöä vastaava ongelmatehtävä, jolloin matemaattiset käsitteet, taidot ja tiedot kehittyvät ongelmanratkaisun kontekstissa (mts. 34). Opettaja voi siis valita oppilailleen käsiteltäväksi sellaisia avoimia ongelmia, joiden avulla hän pyrkii opettamaan jotain matematiikan osa-aluetta ja rakentamaan ongelmanratkaisun kautta oppilaille yhteyksiä laajempaan matemaattiseen kontekstiin. Matemaattinen sisältö voisi olla esimerkiksi matemaattisen perustelemisen harjoitteleminen ongelmanratkaisun kautta, jolloin opettaja pyrkii johdattelemaan oppilaita kohti matemaattista todistamista. Tällöin oppilaiden tavoite ei välttämättä ole pelkästään ongelmanratkaisustrategioiden opettelu, vaan mm. havainnointi, yleistäminen, syy-seuraus suhteiden tarkastelu, hypoteesien asettaminen sekä argumentointi.

Oppilaat voivat itse ongelmanratkaisun avulla rakentaa matemaattisia ideoita ja menetelmiä ainakin osittain (Haapasalo, Zimmermann & Eronen 2006, 55). On kuitenkin huomattava, että ongelmanratkaisustrategiatkaan eivät ole matemaattisista sisällöistä ja kontekstista riippumattomia (Lesh & Zawojewski 2007, 765). Ongelmanratkaisutehtäviä suunnitellessa opettajan tulee pohtia miten matemaattiset sisällöt etenevät loogisesti: mitä aikaisemmin opittua oppilaat tarvitsevat ongelman ratkaisemiseen, minkälaisia ongelmia oppilaiden tulisi ratkaista ennen valittua ongelmaa, miten ongelman voisi esittää oppilaille ja miten ongelma tulisi esittää yksilöllisesti monenlaisille oppijoille (Pólya 1962, 210).

Ongelmanratkaisustrategiat

Leppäahon (2007, 97) mukaan oppilaat tarvitsevat systemaattista ohjausta sekä tietoa ongelmanratkaisustrategioista pystyäkseen selviytymään ongelmanratkaisutehtävistä. Ongelmanratkaisussa taitavat oppilaat pystyvät tutkijoiden mukaan yleistämään ratkaisujaan nopeasti muutamienkin tapauksien pohjalta sekä hyppimään ratkaisuissaan vaiheiden yli edetessään kohti ratkaisua, kun keskiverto-oppilaiden puolestaan tarvitsee nähdä ja prosessoida kaikki ongelmanratkaisun loogiset vaiheet (Lesh & Zawojewski 2007, 767). Ongelmanratkaisustrategiat voidaan jaotella **metakognitiivisiin strategioihin** sekä varsinaisiin ratkaisuun liittyviin **ratkaisustrategioihin eli ns. heuristiikkoihin** (mts. 775).

Metakognitiivisilla strategioilla tarkoitetaan ongelmanratkaisuun liittyviä ajattelun taitoja. Ryven (2007) mukaan oppilaat tulisi johdatella matemaattiselle tieteenalalle tyypilliseen ajatteluun ja tapoihin. Toisin sanoen oppilaiden tulisi oppia käyttämään ongelmanratkaisun apuna tuotteliaita ajattelun tapoja ja näkökulmia matematiikasta. Ongelmanratkaisuprosessin kannalta olennaisia metakognitiivisia strategioita ovat mm. kontrolli ja itsesäätely, strateginen tieto, itsearviointi sekä tietoisuus omista ajatteluprosesseista (Ryve 2007, Lesh & Zawojewski 2007). Vaikka metakognitiolle ei ole vain yhtä selkeää määritelmää (Lesh & Zawojewski 2007, 771), Schoenfeld (1992) pitää metakognitiivisia taitoja sellaisina ajattelun taitoina, joiden avulla oppilas pystyy ongelmanratkaisutilanteessa mm. hajottamaan laajemman ongelman pienempiin alaongelmiin, asettamaan alaongelmat tärkeysjärjestykseen, lajittelemaan ne ratkaisujärjestykseen sekä lopulta ratkaisemaan ne. Tutkijat pitävät metakognitiivisina taitoina myös oppilaan tietoisuutta omista ajatteluprosesseita ratkaisun aikana sekä kykyä arvioida ja säädellä ratkaisun etenemistä. Metakognitiivisten taitojen tulisikin kehittyä matematiikan oppimisen kontekstissa: oppilaan ajattelutaitojen tulisi kehittyä yhdessä matemaattisen ymmärryksen ja sisällön kanssa. (Lesh & Zawojewski 2007, 771.)

Schoenfeldin mukaan (1985, 27) kontrollilla on tärkeä osuus ongelmanratkaisuprosessissa. Kontrollilla tarkoitetaan ongelmanratkaisussa esimerkiksi ratkaisusuunnitelman tekemistä, tavoitteiden valintaa, oman toiminnan tarkastelua ja ratkaisujen arviointi, muokkaamista ja suunnitelman hylkäämistä, kun oppilas arvioi sen toimimattomaksi. Oppilaan tulisi oppia kysymään itseltään mm. seuraavanlaisia kysymyksiä: miksi tämä suunnitelma on parempi kuin joku toinen, pitäisikö minun kokeilla ratkaisua jollain toisella suunnitelmalla ja kuinka paljon aikaa voin käyttää ongelmanratkaisuprosessin eri vaiheisiin (Ryve 2007, 43). Noviisien ja eksperttien ajattelu eroaa huomattavasti toisistaan. Voidaankin ajatella, että myös oppilaiden ajattelun taidot eroavat opettajan ajattelusta merkittävästi. Eroja ajattelussa on kuitenkin vaikea havaita pelkkää käytöstä tai ratkaisua tarkastelemalla. (Lesh & Zawojewski 2007, 765.) Opettajan tulisikin opetuksessaan tuoda esille metakognitioon liittyviä kysymyksiä puhumalla auki omaa ajatteluaan, jotta oppilaat saisivat konkreettisen mallin myös omalle ajattelulleen (Pimm 1987, 24).

Ratkaisustrategiat eli heuristiikat ovat ennalta opittuja tapoja ratkaista ongelma ja ne voivat helpottaa oppilasta uuden ongelman ratkaisussa. Ratkaisustrategioita voi oppia ja harjoitella esimerkkien kautta, mutta oppilas joutuu uuden ongelman kohdatessaan keksiä itse minkälaista strategiaa hän käyttää ratkaistessaan ongelmaa. (Leppäaho 2007, 95.) Yksittäisiä ratkaisustrategioita ovat esimerkiksi kuvan piirtäminen, samankaltaisten ongelmien ja ratkaisujen etsiminen ja lähtötietojen ja tavoitteiden identifiointi. Ratkaisustrategioiden on ajateltu olevan tärkeitä ongelmanratkaisun kehittymisen kannalta. Tutkimusten mukaan yksittäisten ratkaisustrategioiden opettaminen ei kuitenkaan johda automaattisesti ongelmanratkaisutaitojen parantumiseen. (Lesh & Zawojewski 2007, 768.) Ratkaisustrategioita voi olla vaikea opettaa (Leppäaho 2007, 95) ja ongelmaksi näyttää myös muodostuvan se, että oppilaiden on vaikea soveltaa liian yleisiä ratkaisustrategioita, mutta yksityiskohtaisia, ongelmaspesifisiä strategioita tulisi opetella niin paljon, että niiden muistaminen ja valitseminen kuhunkin tehtävään muodostuisi ongelmaksi (Lesh & Zawojewski 2007, 769). Näyttää tutkimusten mukaan siltä, että opetetuilla strategioilla ei ole selkeää siirtovaikutusta uusiin ongelmiin (Schoenfeld 1992, 52).

LeBlanc (1977, 17) on jakanut ratkaisustrategioita yleisiin ja auttaviin strategioihin. Ongelmanratkaisuun voidaan valita yleinen strategia, jota tuetaan käyttämällä auttavia strategioita. Taulukossa 3 on esitelty LeBlancin (1977, 17) ratkaisustrategiat. Leshin ja Zawojewskin (2007, 769–770) mukaan heuristiikat ja esimerkit niiden käytöstä on tarkoitettu auttamaan oppilaita näkemään ongelmat uudella tavalla ja niitä ei ole tarkoitettu pelkästään ratkaisumenetelmiksi. Ratkaisustrategioihin ei välttämättä pidä suhtautuakaan ohjeina ratkaisussa etenemiseen, vaan heuristiikat voisivat toimia tapana pohtia ongelmanratkaisuprosessia jälkikäteen. Omien strategioiden pohtimisen ja reflektoinnin kautta oppilas voi löytää toimivia ratkaisukokemuksia tulevien ongelmien ratkaisuja varten. (mp.)

Taulukko 3: LeBlancin ratkaisustrategiat (LeBlanc 1977, 17).

Yleiset strategiat	**Auttavat strategiat**
1. Yritys ja erehdys 2. Eri mahdollisuuksien listaaminen 3. Ongelman yksinkertaistaminen 4. Kaavan etsiminen 5. Kokeilu 6. Päättely 7. Arviointi ja laskeminen 8. Takaperin työskentely	Auttavat strategiat soveltuvat yleisten strategioiden käyttöön ja niitä ovat mm. diagrammit, taulukot, piirrokset, luettelot ja yhtälöt.

Uskomukset ja asenteet

Tutkimusten mukaan oppilaan suhtautuminen matematiikkaan ja uskomukset omista kyvyistä ongelmanratkaisijana vaikuttavat myös oppilaan ongelmanratkaisutaitoihin (Schoenfeld 1989, 342). Vaikka oppilas oppisikin käyttämään erilaisia heuristiikkoja ongelmanratkaisussa, oppilaan uskomukset, asenteet ja tunteet vaikuttavat positiivisesti tai negatiivisesti oppilaan metakognitiivisiin strategioihin, mm. kykyyn kontrolloida ja tarkastella ongelmanratkaisuprosessiaan. (Lesh & Zawojewski 2007, 775.) Schoenfeld (1992, 67) esitteleekin yhdeksi tärkeäksi ongelmanratkaisun osa-alueeksi oppilaiden uskomukset. Oppilaan uskomukset liittyen matematiikkaan ja matematiikan oppimiseen jaetaan usein kolmeen kategoriaan: uskomukset itsestä yhteydessä matematiikan oppimiseen ja ongelmanratkaisuun, uskomukset kontekstista ja uskomukset matematiikasta tieteenalana (Schoenfeld 1985, 45). Joidenkin oppilaiden tulee myös poisoppia aikaisemmin syntyneistä haitallisista uskomuksista ja asenteista, jotta he voisivat oppia ja käyttää ongelmanratkaisussa tarvittavia metakognitiivisia prosesseja ja strategioita (Schoenfeld 1992, 67).

Oppilaiden kokemuksilla matematiikasta näyttää myös olevan vaikutus oppilaiden menestykseen ongelmanratkaisutilanteissa (Schoenfeld 1989, 349). Oppilaiden yleisiä uskomuksia, joilla on vahva negatiivinen vaikutus oppilaan matemaattiseen ajatteluun on Schoenfeldin (1992, 69) mukaan esimerkiksi:

- Matematiikan ongelmilla on vain yksi ainoa oikea vastaus.
- Matematiikan ongelmien ratkaisuun on vain yksi oikea tapa – yleensä se, jonka opettaja on juuri taululla esittänyt luokalle.
- Tavalliset oppilaat eivät voi ymmärtää matematiikkaa, he voivat vain soveltaa ulkoa oppimaansa mekaanisesti.
- Matematiikkaa tehdään yksin.
- Oppilaat, jotka ymmärtävät matematiikkaa osaavat ratkaista minkä tahansa opittuun asiaan liittyvän ongelman alle viidessä minuutissa.
- Koulumatematiikalla on vähän tai ei mitään yhteyttä todelliseen maailmaan.

Leppäahon mukaan (2006, 96) tutkijat ovat todenneet ongelmanratkaisutehtävien aiheuttavan oppilaissa jonkin tasoista epävarmuutta, joka oppilaasta ja tehtävästä riippuen voidaan luokitella korkeaksi tai matalaksi. On myös tavallista, että yrityksistä huolimatta oppilas ei saa ratkaistua ongelmatehtävää, jolloin oppilas voi kokea epävarmuuden ja epäonnistumisen tunteita (mp.). Toistuvasti esiintyvistä tunteista muodostuu lopulta pysyviä uskomuksia ja asenteita (Lesh & Zawojewski 2007, 776). Virheelliset ratkaisuyritykset ja vastaukset ovat kuitenkin osa ongelmanratkaisun ja matematiikan oppimista ja taitavatkin matemaatikot tekevät useita yrityksiä ratkaistessaan haastavia ongelmia. Väärät vastaukset tulisikin ymmärtää osaksi ratkaisuprosessia. (Leppäaho 2006, 106.) Tutkimusten mukaan myös tietyt oppilaiden ominaisuudet, kuten motivaatio ja kiinnostus, joiden on ajateltu pysyvän vakioina eri tilanteissa, vaihtelevat oppilaiden ongelmanratkaisuprosessien eri vaiheissa heidän ratkaistessa monimutkaisia ongelmatehtäviä (Lesh & Zawojewksi 2007, 776–777).

3.2 Opettaja ongelmanratkaisuprosessin ohjaajana

Avoimien ongelmien parissa työskentelyssä opettajan rooli on tiedon siirtäjän sijasta oppimisen ja ymmärtämisen ohjaaja ja opetuksen painopiste on luokan kommunikoinnissa sekä oppilaiden aktiviteeteissa (Pehkonen 2006, 126). Vaikka ongelmanratkaisutunnin keskiössä onkin oppilaan ratkaisuprosessi, on opettajalla silti merkittävä rooli: opettajan tulee rakentaa ongelman ympärille oppilasta motivoiva oppimisympäristö (mp.). Lisäksi opettajan tulee ymmärtää ongelmien rooli opetuksen välineenä. Ongelmanratkaisun opettamisen tulee olla pelkkiä ongelmia suurempi kokonaisuus: ongelmat eivät ole toisistaan tai matemaattisesta kontekstista irrallisia palasia vaan ne ovat osa laajempaa kokonaisuutta. (Karp 2009, 130.) Opettajan tulisikin olla selvillä opetuksen tavoitteista valitessaan käsiteltäviä ongelmia tai tuodessaan esille strategioita opetuksessaan.

Tässä luvussa edetään ongelmanratkaisunoppitunnin suunnittelusta (hyvän ongelman valinta) oppitunnin järjestämiseen sekä esitellään opettajan roolia oppilaan ongelmanratkaisuprosessin ohjaajana ja luokkahuoneen vuorovaikutuksen ylläpitäjänä.

Hyvän ongelman valinta

Avoimeen ongelmanratkaisuun perustuva oppitunti alkaa Shimizun (1999, 113) mukaan opetettavan aiheen huolellisella analysoinnilla ja tavoitteiden asettamisella. Opettajan tulee pohtia aikaisempia ja tulevia oppitunteja ja niiden tavoitteita sekä matemaattisia yhteyksiä. Ongelmaa valitessa tulee pohtia myös etukäteen todennäköisten ratkaisumenetelmien syntymistä sekä niihin sopivia ohjausmenetelmiä. Opettaja valitsee ongelman tavoitteidensa mukaisesti – hän voi valita sellaisen ongelman, jonka avulla oppilas harjoittele esimerkiksi ongelmanratkaisustrategioiden käyttöä tai keskittyy erityisesti johonkin tiettyyn ongelmanratkaisuprosessin vaiheen harjoitteluun tai ongelman, jonka kautta oppilas saa harjoitusta tietystä matematiikan osa-alueesta. (Singer & Voica 2012, 25; Schroeder & Lester 1989, 32–33.)

Hyvin valittu ongelma ei kuitenkaan aina takaa onnistunutta oppituntia (Pehkonen 2006, 127). Tutkimuksissa on havaittu, että opettajat sivuuttavat usein hyviä pohdintatilanteita, koska he eivät ole jättäneet oppituntisuunnitelmiinsa tilaa oppilaiden ajatuksille, luovuudelle ja aloitteille. Opettajat voivatkin kertoa käyttävänsä avoimia ongelmia ja ongelmanratkaisua oppitunneillaan, mutta opetuksen tarkempi tarkastelu onkin paljastanut, että oppitunneilla ongelmanratkaisua käsitellään mekaanisesta näkökulmasta. Tällöin ”hyvät ongelmat” jäävät käyttämättä mielekkäällä tavalla. (Stehlikova 2006, 20.)

Opettajan rooli ongelmanratkaisutunnilla

Nohdan mukaan avoimia ongelmia käytetään Japanissa matematiikan opetuksessa oppilaiden matemaattisen ajattelun kehittämisessä (ks. Hähkiöniemi ym. 2012). Oppiminen tapahtuu ongelmanratkaisun ja siihen liittyvien luokkakeskustelujen kautta. Avoimien ongelmien kautta tapahtuva lähestyminen painottaa oppilaiden osallisuutta ongelmien muodostamisessa, erilaisten ratkaisumenetelmien rakentamisessa ja uusien ongelmien asettamisessa, minkä kautta oppilas yleistää ratkaisujaan laajempaan kontekstiin. (mp.)

Japanilaisessa matematiikan opetuksessa oppitunnit suunnitellaan avoimen ongelmanratkaisun ympärille huomioiden erilaiset ratkaisuvaihtoehdot (Shimizu 1999, 109). Opettaja esittää koko luokalle tärkeitä kysymyksiä, jotka herättävät oppilaan ajattelua. Lisäksi opettaja arvioi oppilaiden ongelmanratkaisuprosesseja ja antaa tarpeen mukaan vihjeitä tai suuntaa oppilasta ongelman käsittelyssä. Opettaja painaa myös mieleensä, minkälaisia ratkaisuja oppilaat tekivät, jotta hän voi myöhemmin pyytää oppilaita esittämään ratkaisujaan koko luokalle. Oppitunnin aikana opettaja hioo oppilaiden ajatuksia yhteisesti ja pyrkii löytämään yhdessä oppilaiden kanssa ongelmanratkaisun takana olevan matemaattisen ajatuksen. Oppilaiden ratkaisuja tarkastellaan edeten alkeellisimmista ratkaisuista monimutkaisempiin miettien samalla ratkaisuehdotusten yhteyksiä. Tunnin lopuksi opettajan tulee vielä tiivistää tunnin aikana tehdyt havainnot ja opitut asiat. (mts. 110–111.)

Avoimeen ongelmanratkaisuun keskittyvällä oppitunnilla opettaja siis ohjaa oppilaiden ongelmanratkaisuprosessia koko luokalle yhteisten tai yksittäisille oppilaille suunnattujen kysymysten kautta, havainnoi oppilaiden ratkaisuehdotuksia sekä tuo ne koko luokan nähtäviksi mielekkäässä järjestyksessä sekä ohjaa oppilaita huomaamaan ratkaisujen välisiä suhteita toisiinsa. Lisäksi opettaja pyrkii tuomaan esille yhteisten keskustelujen muodossa myös ongelmanratkaisun suhdetta laajempaan matemaattiseen kontekstiin. (Shimizu 1999, 110–111.)

Opettaja ongelmanratkaisuprosessin ja luokkahuoneen vuorovaikutuksen ohjaajana

Opettaja pystyy ohjauksellaan muuttamaan suljetun ongelman avoimeksi tai avoimen ongelman suljetuksi. Hän pystyy kysymyksillään muuttamaan vaikean tehtävän helpoksi tai helpon tehtävän vaikeaksi. Opettajan ohjaukseen vaikuttavat monet tekijät, esimerkiksi opettajan matemaattinen ymmärrys ja matemaattinen tieto, tieto oppijoista, opettajan käyttämät ohjausmenetelmät sekä uskomukset matematiikasta. (Chapman 2013, 1.) Hähkiöniemi ja Leppäaho (ks. Hähkiöniemi ym. 2012) ovat jakaneet opettajan ohjauksen kolmeen tasoon: pintatason ohjaus (surface level guidance), jolloin opettaja ei huomaa olennaisia osia oppilaan ratkaisusta, passivoiva ohjaus (inactivating guidance), jolloin opettaja paljastaa oppilaalle olennaisia osia ratkaisusta, strategiasta tai jopa koko ratkaisun ja aktivoiva ohjaus (activating guidance), jolloin opettaja ohjaa oppilasta tutkimaan sillä hetkellä olennaisia osia ongelmasta. Chapmanin (2013, 1–2) mukaan opettajan tulisikin ymmärtää oppilaiden valmiudet sekä aikaisemmat kokemukset ja näkemykset itsestä ja ongelmanratkaisusta ohjatessaan heidän työskentelyään. Opettajan tulee ohjauksessaan korostaa tarpeellisia kohtia ongelmanratkaisusta, kysyä oppilailta heidän ongelmanratkaisuprosessilleen olennaisia kysymyksiä ja ohjata heitä ratkaisuprosessissa paljastamatta kuitenkaan ratkaisun kannalta olennaisia osia. (Chapman 2013, 1–2.) Hyvän ongelman ja opetusmenetelmien valinnan jälkeen keskiössä ongelmanratkaisun oppitunnilla on opettajan ohjaus.

Opettaminen on vuorovaikutusta ja opettajan ja opiskelijan kommunikointi on keskeisessä asemassa kun oppilas muodostaa matemaattisia käsitteitä (Ahtee, M., Pehkonen, E., Krzywacki, H., Lavonen, J. & Jauhiainen, J. 2005, 94–95). Opettajat ja tutkijat ovatkin laajalti yhtä mieltä suullisen kommunikoinnin tärkeydestä matematiikan opetuksessa (Leppäaho 2006, 96). Matemaattisen puheen harjoittelu ja toisaalta myös sen kuuntelu ovat tärkeitä välineitä oppilaan selittäessä, kyseenalaistaessa, perustellessa ja selventäessä matemaattisia ajatuksia ja ideoita. Yhteisen matemaattisen kielen rakentuminen on tärkeää myös luokkahuonekeskustelujen kannalta. (mp.) Opettajan tulee kuitenkin huomioida vuorovaikutustilanteissa oppilaan kyky esittää ajatuksiaan matemaattisin termein: spontaanit keskustelut voivat olla täynnä puolivalmiita tai epämääräisiä ajatuksia (Pimm 1987, 22). Ääneen puhuminen on kuitenkin ajattelun kannalta tärkeää, vaikka matemaattinen kieli ei olisikaan oikein formuloitua. Pelkkä yrityskin selventää omaa ajattelua ääneen ajattelun kautta voi auttaa oppilaita selventämään ja järjestämään ajatuksiaan itselleen. Pelkkä kysymyksen lukeminen ääneenkin voi jo auttaa. Lisäksi on tärkeää kannustaa oppilaita ajattelemaan ääneen, jotta opettaja saisi tilaisuuden arvioida oppilaan ajattelun vaiheita ja ongelmanratkaisuprosessin etenemistä. (mts. 23.) Oppilaiden epämääräisiä käsitteitä voi yrittää selventää kysymysten kautta. Tosin voi myös olla kehittyville matemaattisille keskustelutaidoille haitallista, jos opettaja yrittää kontrolloida oppilaan puhetta liiaksi vaatimalla täsmällistä käsitteiden määrittelyä. Usein opettaja pystyy asiayhteydestä päättelemään, mitä oppilas tarkoittaa huolimattomasti muotoiluilla käsitteillään ja liiallinen kieleen keskittyminen ajatusten ja oivallusten ilmaisun kustannuksella voi olla haitallista oppilaan kehittyville dialogitaidoille (mts. 42). Koska koulujen konventiot estävät yleensä oppilaan yksinpuhelun, oppilas saattaa tarvita opettajan ajatustensa vastaanottajaksi. Opettajan tulisi lisäksi toimia oppilaille sisäisen monologin mallina puhuen auki omia ajatuksiaan, jolloin oppilaat kuulevat miten opettajan matemaattinen ajattelu ja ongelmanratkaisuprosessi etenee (mts. 24).

Opettajan tulisi huomioida ja kehittää oppilaiden vuorovaikutustaitoja matematiikan oppitunneilla. Pelkkien vastausten sijaan opettajien tulisi kannustaa oppilaita kertomaan ratkaisujensa etenemisestä ja ratkaisumenetelmistään, havainnoistaan, selityksistään sekä perusteluistaan.

Oppitunneilla oppilaat näkevät usein vain valmiita vastauksia ja hiottuja ratkaisuja ja ajatuksia, eivätkä keskeneräisiä ajatuksia, joita he itse vielä tuottavat. (Pimm 1987, 43.) Leiwon, Kuusisen, Nykäsen ja Pöyhösen (1987, 168–176) tutkimuksessa peruskoulun luokkakeskusteluissa osoitti, että lähes 80 % oppituntien ilmauksista oli opettajan tekemiä. Suurin osa oppilaiden tekemistä ilmauksista oli vastauksia, jotka rajoittuivat faktatiedon muistamiseen tai kyllä/ei-vastauksiin. Tällöin oppilaat eivät saa harjoitella matemaattisen puheen tuottamista (Pimm 1987, 54).

3.3 Ongelmanratkaisuprosessin reflektointivaiheen ohjaus

Aikaisemmissa luvuissa esiteltiin oppilaan ongelmanratkaisutaitoja, joita opetuksen näkökulmasta olisi hyödyllistä pyrkiä kehittämään. Schroederin ja Lesterin (1989, 32-33) luokittelua käyttämällä ongelmanratkaisuun keskittyvällä oppitunnilla voidaan keskittyä opettamaan jotain ongelmanratkaisun kautta (matemaattisen sisällön ja kontekstin huomioiminen) tai opettaa varsinaista ongelmanratkaisua (ongelmanratkaisuun liittyvät metakognitiiviset strategiat sekä ratkaisustrategiat). Lisäksi Schoenfeldin (1992, 69) mukaan oppilaan uskomuksilla ja asenteilla matematiikasta on positiivinen tai negatiivinen vaikutus oppilaan suoriutumiseen ongelmanratkaisutehtävistä. Oppilaan ongelmanratkaisutaidot eivät ole toisistaan erillisiä, vaan ne ovat toisiinsa kytköksissä. Tutkimuksissa on esimerkiksi havaittu, että tilanteissa, joissa oppilaat aktiivisesti kuvailivat ongelmanratkaisuprosessejaan ääneen ja reflektoivat omaa ajatteluaan, heidän huomattiin pystyvän integroimaan uskomukset, asenteet, tunteet ja arvot sekä metakognitiivisten strategioiden että ratkaisustrategioiden kanssa. (Lesh & Zawojewksi 2007, 776-777.)

Reflektointivaiheella on tärkeä rooli ajattelutaitojen ja matemaattisen ymmärryksen kehittymisessä (Mason ym. 1985, 39). Reflektointivaiheessa keskitytään ongelmanratkaisuprosessin analysointiin, kootaan ja hiotaan tärkeitä ajatuksia ja oivalluksia ja yleistetään ratkaisua laajempaan kontekstiin (Mason ym. 1985, 39; Shimizu 1999). Opettajan ohjauksen reflektointivaiheessa tulisikin heijastaa ongelmanratkaisutunnille valitun tehtävän tavoitteita: jos opettaja on valinnut ongelman ajatuksenaan ohjata oppilaita tarkastelemaan tiettyjä matemaattisia sisältöjä, on järkevää, että hän ohjaa oppilaita tarkastelemaan valittuja osa-alueita myös reflektointivaiheessa sekä kokoaa ja tiivistää löydettyjä havaintoja myös yhteisesti. Chapmanin (2013, 1–2) mukaan opettajan tuleekin olla ennalta tietoinen, mitä osa-alueita ratkaisuprosesseista tai ongelmista nousee oppitunnin keskiöön – valitun ongelman luonteen ymmärtäminen on keskiössä myös reflektointivaiheessa. Reflektointivaiheen ohjauksessa huomioitavat osa-alueet voidaankin jakaa kolmeen pääluokkaan: ongelman matemaattinen sisältö ja sen liittyminen laajempaan kontekstiin, ongelmanratkaisuun liittyvät strategiat (metakognitiiviset strategiat ja ratkaisustrategiat) sekä oppilaiden uskomukset ja asenteet liittyen matematiikkaan ja ongelmanratkaisuun (ks. taulukko 4).

Taulukko 4: Opettajan ohjaus reflektointivaiheessa.

Pääluokat	**Alaluokat**	**Esimerkkejä**
Ongelman matemaattinen sisältö ja konteksti	a) Ongelmanratkaisun avulla opittava sisältö b) Ongelman laajentaminen matemaattiseen kontekstiin c) Ratkaisun laajentaminen matemaattiseen kontekstiin d) Tieteenalan konventiot	- Ongelman tai ratkaisun yleistäminen - Ongelmien liittäminen toisiin ongelmiin – yhteyksien näkeminen - Ongelman näkeminen osana suurempaa kokonaisuutta – oikean ongelman valinnan tärkeys. - oppilaiden omien ongelmien syntyminen ratkaisun kautta. - Matematiikalle tieteenalana tyypilliset konventiot, esim. ratkaisun formaali esittäminen
Ongelmanratkaisustra-tegiat	a) Metakognitiiviset strategiat b) Ratkaisustrategiat eli heuristiikat	- tieteenalalle tyypillinen ajattelu - oman ajattelun kontrollointi ja itsesäätely - strategisen tiedon käyttö - itsearviointi - tietoisuus omista ajatteluprosesseista - ennalta opitut ratkaisustrategiat. - erilaisten ratkaisustrategioiden vertailu

Oppilaan uskomukset ja asenteet	a) Suhtautuminen itseen yhteydessä matematiikkaan ja ongelmanratkaisuun b) Suhtautuminen kontekstiin c) Suhtautuminen matematiikkaan tieteenalana	- Haitallisten asenteiden ja uskomusten poisoppiminen. - Positiivisten asenteiden ja uskomusten luominen. - Virheiden näkeminen osana ongelmanratkaisuprosessia.

Taulukkoon 4 on pääluokkien lisäksi koottu alaluokkia, joihin ohjauksessa voidaan keskittyä, esimerkiksi ongelmanratkaisustrategiat jakaantuvat selkeästi kahteen erilliseen alaluokkaan metakognitiivisiin strategioihin ja ratkaisustrategioihin. Lisäksi taulukkoon on lisätty havainnollistamisen avuksi esimerkkejä, mitä osa-alueita opettaja voi ohjauksessaan huomioida. Nämä esimerkit korreloivat mm. Pólyan (1945) ja Masonin (1985) ongelmanratkaisumalleissa esitettyjä oppilaan ongelmanratkaisuprosessin reflektointivaihetta ohjaavia kysymyksiä (ks. taulukko 2).

Ohjatessaan oppilaita reflektointivaiheessa, sekä ns. pulpetin vieressä että yhteisessä kokoavassa luokkakeskustelussa, opettajan tulisi huomioida asettamansa tavoitteet ongelmanratkaisulle (Chapman 2013, 1–2). Teoriakirjallisuudesta olen pyrkinyt kattavasti tuomaan esille ongelmanratkaisutaitojen kehittämisen kannalta olennaiset osa-alueet, joiden perusteella olen rakentanut analyysirungon tutkimusaineistolle.

4 Tutkimustehtävä ja tutkimuskysymys

Tämän tutkimuksen tutkimustehtävänä on tarkastella niitä tapoja, joilla luokanopettajat ohjaavat oppilaiden reflektointivaihetta sekä yhteistä tehtävän yhteenvetoa ongelmanratkaisuun keskittyvällä oppitunnilla.

Tavoitteenani on vastata seuraavaan tutkimuskysymykseen:

1. Miten luokanopettajat ohjaavat oppilaitaan ongelmanratkaisuprosessin reflektointivaiheessa?

Tutkimuskysymykseen etsittiin vastausta havainnoimalla kolmea suomalaista viidennen luokan luokanopettajaa ongelmanratkaisuun keskittyvällä oppitunnilla. Reflektointivaihe tunnistettiin teoriaosuudessa rakennetun reflektointivaihetta kuvailevan taulukon mukaisesti (taulukko 2) sekä opettajan toimintaa analysoitiin siihen liittyvän opettajan ohjaukseen keskittyvän taulukon avulla (taulukko 4).

5 Tutkimuksen toteutus

Tutkimukseni on luonteeltaan laadullinen tapaustutkimus, joten siinä pyritään kuvaamaan ilmiöitä tai tapahtumia, ymmärtämään tiettyä toimintaa tai antamaan tulkinta jollekin ilmiölle (Tuomi & Sarajärvi 2003, 87). Laadullisessa tutkimuksessa ei pyritä tilastollisiin yleistyksiin (mp.) vaan tavoitteenani on kuvailla opettajien ohjausta ja siitä nousevia teemoja ongelmanratkaisuprosessin reflektointivaiheessa.

Tutkimus on rajattu kolmeen suomalaiseen luokanopettajaan, jotka opettivat viidettä luokkaa ja jotka ovat olleet mukana ongelmanratkaisuun liittyvässä tutkimusprojektissa mukana tutkimusprojektin alusta alkaen vuosina 2010–2013. He ovat pitäneet noin kerran kuukaudessa annettuun ongelmatehtävään perustuvan oppitunnin yhteensä kolmen vuoden ajan. Tässä tutkimuksessa käytetty ongelma oli järjestyksessä 17. käsitelty ongelma. Kaikki kolme opettajaa opettivat samaa avointa ongelmanratkaisutehtävää (”Labyrintti” ks. liite 1). Opettajat saivat kaikki saman tehtävänannon oppitunneilleen, mutta saivat itse päättää lähestymistavan ongelmanratkaisuun sekä näkökulmat, joita halusivat nostaa tarkasteluun. Labyrinttitehtävässä tutkitaan erikokoisia labyrintteja: 3x3 labyrintissa molemmilla sivuilla on kolme huonetta, jolloin labyrintissa on yhteensä yhdeksän huonetta ja vastaavasti 4x4 labyrintissa molemmilla sivuilla on neljä huonetta, eli labyrintissa on yhteensä 16 huonetta. Lisäksi oppilaille oli piirretty valmiiksi myös 5x5, 6x6, 7x7 ja 8x8 labyrintit. Labyrintti-tehtävässä matemaattinen perusteleminen ja todistamisajatteluun johdattelu ovat keskeisessä osassa: oppilaat saattoivat mm. tehdä havaintoja labyrinttien ratkaistavuudesta, muodostaa hypoteesin ja testata sitä kokeilemalla. Lisäksi muodostettua sääntöä voidaan yleistää suorakulmion muotoisiin labyrintteihin. Tehtävästä pystyi myös nostamaan muitakin osa-alueita tarkasteluun, mm. erilaiset ratkaisureitit ja niiden soveltaminen muuttuviin labyrintteihin. Valitusta labyrintti-tehtävästä oli siis mahdollista tuoda monipuolisesti esille reflektointivaiheen osa-alueita, joita teoriaosuudessa on esitelty perusteellisemmin.

5.1 Tutkimushenkilöt

Tähän tutkimukseen valitut kolme opettajaa olivat pääkaupunkiseudun kouluissa työskenteleviä naisopettajia, jotka olivat valikoituneet vapaaehtoisina ongelmanratkaisua käsittelevään tutkimusprojektiin. Kaikilla opettajilla oli vähintään 9 vuotta opetuskokemusta takanaan, mutta ei erityisiä matematiikan opintoja. Tutkimusprojektin aikana he ovat kuitenkin tavanneet tutkijoita ja keskustelleet ongelmanratkaisusta. Ennen kunkin ongelman opettamista heillä on mahdollisuus keskustella tutkijoiden kanssa ongelmasta.

5.2 Aineiston kuvaus

Aineisto on kuvattu tammi- ja helmikuun 2013 aikana. Alkuperäinen aineisto sisälsi viiden luokanopettajan 45-minuutin mittaiset labyrintti-tehtävään keskittyvät oppitunnit. Tähän tutkimukseen valittiin kolmen opettajan oppitunnit sen perusteella, minkälaisia osa-alueita he toivat reflektointivaiheen ohjauksessa esille. Tutkimukseen pyrittiin tuomaan esille monipuolisesti erilaisia reflektointivaiheen ohjaustapoja.

Hirsjärven, Remeksen ja Sajavaaran mukaan (2009, 186) muiden tutkijoiden keräämän aineiston käyttö ei vaikuta tutkimuksen arvoon, vaan voi olla tarkoituksenmukaistakin käyttää valmista aineistoa. Materiaalista löytyy usein uusia näkökulmia, kun tutkimusryhmän keräämää materiaalia analysoidaan monipuolisesti eri näkökulmista eri tutkijoiden toimesta (Seale, Gobo, Gubrium & Silverman 2004, 297). Koska tässä tutkimuksessa pyrin tutkimaan opettajien tapaa ohjata ongelmanratkaisun reflektointivaihetta, valmis materiaali soveltui käyttööni erinomaisesti. Tutkimalla opettajien opetusta esimerkiksi haastattelemalla heitä saataisiin mahdollisesti tietoa vain opettajien käsityksistä omasta opetuksestaan, eikä välttämättä tietoa siitä, miten opetustilanne todellisuudessa etenee (Tuomi & Sarajärvi 2003, 83). Havainnoinnin avulla voidaan saada suoraa tietoa opettajien käyttäytymisestä (Hirsjärvi ym. 2009, 213). Havainnoinnin haittana saattaa olla, että havainnoija sitoutuu emotionaalisesti tutkittavaan tilanteeseen ja tutkimuksen objektiivisuus kärsii (mp.). Tässäkin suhteessa muiden tutkijoiden keräämän aineiston käyttö voi olla perusteltua.

Opettajat eivät olleet opettaessaan siis tietoisia siitä, että juuri heidän reflektointivaiheen ohjaustaan tultaisiin tarkastelemaan. Oppitunnit kestivät 45 minuuttia. Kamera kuvasi oppitunneilla opettajien toimintaa ja opettajilla oli mikrofonit, jotta puhe kuuluisi selkeästi videolla. Sain tutkimustani varten käyttööni tutkijoiden keräämän videomateriaalin oppituntien kulusta ja oppitunneilla käytetyt tehtävät. Litteroin videomateriaalin aineiston analyysia varten.

5.3 Aineiston analyysi

Aineiston analyysi aloitettiin kirjoittamalla videoiden puhe tekstiksi. Opettajien puhe kuuluu videoilla selkeästi mikrofonien vuoksi, mutta kaikkien oppilaiden puheenvuoroista ei saa selvää, etenkin jos oppilaat puhuvat keskenään. Lisäksi audio-visuaalisen materiaalin litterointi on työlästä ja tutkijan on päätettävä, mitä hän valitsee litterointeihinsa (Luff & Heath 2012, 273). Videoilla esiintyvien kuvioiden ja piirustusten analysointi videolta voi olla haastavaa, sillä kameran kuva ei aina selkeästi näyttänyt mitä opettaja esimerkiksi näytti oppilaille paperilla tai dokumenttikameralla. Koska tarkoituksenani on tässä tutkimuksessa saada selville minkälaisia asioita opettajat nostavat ohjauksessaan esille, katsoin riittäväksi litteroida videoilla esiintyvää puhetta ja huomioida opettajan sanaton toiminta vain silloin kun se palveli tutkimuskysymystä.

Aineiston sisällönanalyysi oli teorialähtöinen. Teoreettiset käsitteet liittyen reflektointivaiheeseen tuotiin siis teoriasta sen sijaan, että ne olisi luotu aineistosta aineistolähtöisesti (ks. esim. Tuomi & Sarajärvi 2003, 116). Teorialähtöistä aineiston analyysia ohjaa aiemmin luotu teoreettinen viitekehys (mp.). Pystyäkseni erottamaan oppitunneista ongelmanratkaisuprosessin reflektointivaiheen, käytin apunani tutkielmani teoriaosuudessa esiteltyjä malleja oppilaan ongelmanratkaisuprosessin reflektointivaiheista, sekä opettajien ohjauksesta reflektointivaiheessa. Teorialähtöisessä aineiston analyysissa teorian pohjalta luodaan aineiston analyysirunko (ks. taulukko 5) (Tuomi & Sarajärvi 2003, 116).

Taulukko 5: Teorialähtöisen aineiston analyysirunko

Pääluokat	**Alaluokat**	**Esimerkkejä aineistosta**
Ongelman matemaattinen sisältö ja konteksti	a) Ongelmanratkaisun avulla opittava sisältö b) Ongelman laajentaminen matemaattiseen kontekstiin c) Ratkaisun laajentaminen matemaattiseen kontekstiin d) Tieteenalan konventiot	”Toimiiko se sama sääntö, mikä oli neliön mallisissa labyrinteissä, toimiiko se suorakulmion mallisissa labyrinteissä?” (Anna)
Ongelmanratkaisustra-tegiat	a) Metakognitiiviset strategiat b) Ratkaisustrategiat eli heuristiikat	”Sanoit että sinä lähdit kokeilemaan, sillä tavalla se synty? Lähtikö joku muukin vain kokeilemaan ensin että miten sielt pääsee ulos?” (Anna)
Oppilaan uskomukset ja asenteet	a) Suhtautuminen itseen yhteydessä matematiikkaan ja ongelmanratkaisuun b) Suhtautuminen kontekstiin c) Suhtautuminen matematiikkaan tieteenalana	”Tää on tosi hyvä. Hei kattokaas, pojat tulee näyttää, ne on tehneet tän… Aika hienosti ratkaistu! Hyvä! Tää oli hieno.” (Eeva)

Litteroidusta aineistosta poimitaan ne asiat, jotka kuuluvat analyysirunkoon. Jos aineistosta nousee analyysirungon ulkopuolisia asioita, ne analysoitaisiin induktiivisen sisällönanalyysin periaatteita noudattaen (Tuomi & Sarajärvi 2003, 116). Näin ei kuitenkaan tässä aineistossa käynyt vaan opettajien ohjaus oli rakennettujen pääluokkien rajoissa.

Litteroituani videot katsoin ne useasti läpi ja tein muistiinpanoja ja alustavaa luokittelua aineistosta analyysirungon mukaisesti. Tämän jälkeen pyrin erottamaan aineistosta ongelmanratkaisun reflektointivaiheeseen liittyvät ilmaukset. Koska oppilaat etenivät ratkaisuissa eri tahtiin ja vaiheet eivät välttämättä seuranneet lineaarisesti toisiaan, tulkitsin aineistoa tukeutuen teoriaosuudessa esitettyihin reflektointivaiheen kuvauksiin saadakseni selvyyttä oppilaan ajattelusta sekä vastaavasti opettajan ohjauksesta reflektointivaiheessa.

6 Opettajat reflektointivaiheen ohjaajina

Tutkimusaineisto analysoitiin taulukossa 5 esitellyn analyysirungon mukaisesti. Tulokset esitellään opettajakohtaisesti, sillä reflektointivaiheessa on olennaista myös tunnin työskentelyvaiheen sisältö ja oppitunteja tulee tarkastella omina kokonaisuuksinaan huomioiden opettajan asettamat kokonaistavoitteet ongelmanratkaisutunnille ja opettajan valitsema näkökulma ongelmatehtävään (Chapman 2013, 1–2). Tutkimustulokset on lajiteltu kolmeen pääluokkaan: ongelman matemaattinen sisältö ja konteksti, ongelmanratkaisustrategiat ja oppilaan uskomukset ja asenteet. Kussakin pääluokassa nostetaan esille opettajan ohjaus sekä yksilövaiheessa (ns. pulpetin vieressä tapahtuva ohjaus) että yhteisessä luokkakeskustelussa nousseet sisällöt.

6.1 Anna – löydetyn säännön yleistäminen

Annan oppilaat työskentelivät 4–5 oppilaan ryhmissä. Ryhmätyöskentelystä huolimatta Anna kuitenkin keskittyi usein ohjaamaan yhtä oppilasta kerrallaan. Muut ryhmän jäsenet kuuntelivat passiivisina ja vain muutama keskeytti opettajan ohjauksen esittääkseen kysymyksiä tai selittääkseen ongelmanratkaisuprosessiaan. Usein opettajan läsnäolo muuttaakin ryhmädynamiikkaa niin, että työskentelyvaiheessa aktiivisesti mukana olleista oppilaista voi tulla passiivisia kuuntelijoita, jotka odottavat opettajan aloitetta keskustelussa. Tällöin tuloksena on useita yksilökeskusteluita opettajan kanssa yhteisen ryhmäkeskustelun sijasta. (Pimm 1987, 26–27.) Näin näytti tapahtuvan myös Annan oppitunnilla.

6.1.1 Matemaattinen sisältö ja konteksti

Annan oppitunnilla reflektointivaiheessa käsiteltiin erityisesti ongelmanratkaisun avulla opittuja sisältöjä sekä ongelman ja ratkaisun laajentamista alkuperäistä asetelmaa pidemmälle.

Ongelmanratkaisun avulla opittava matemaattinen sisältö

Labyrinttitehtävässä oli matemaattisen sisällön kannalta tärkeää, että oppilas teki havaintoja ratkaisuistaan, muodosti hypoteesin, testasi sitä ja pystyi näin perustelemaan omaa vastaustaan, vaikka ei täysin oikeaa matemaattista ratkaisua labyrinttitehtävään olisi pystynytkään vielä muodostamaan. Annan oppitunnilla oppilaat pääsivät nopeasti työskentelyvaiheessa pohtimaan labyrinttitehtävän ydinongelmaa, joka liittyi havaintojen tekemiseen, hypoteesin muodostamiseen ja sen testaamiseen, eli matemaattiseen perustelemiseen ja todistamisajatteluun.

Oppilaat pääsivät nopeasti työskentelyn alkuun ja Anna ohjasi oppilaitaan heti tunnin alussa suuntaamaan työskentelyään pelkän labyrintin ratkaisemisen sijasta pohtimaan, pääseekö kaikista labyrinteistä ulos ja minkälaiset syyt voisivat vaikuttaa labyrinttien ratkaisuihin. Nopeasti tunnin alussa yksi oppilaista muodosti hypoteesin labyrinttien koon ja sen ratkaistavuuden välille:

> Oppilas: Täs kuviois, ni täst ei pääse ja täst pääsee.
> Anna: Mistä se vois johtua sitte?
> Oppilas: Riippuu näistä, tos on kolme tollasta rivii alaspäin ja täst menee just tälleepäin, ni ei pääse.
> Anna: Okei…
> Oppilas: Ja sit on sama tyylii…
> Anna: No mikä ero sitte tähän on? Ootsä kokeillu pääseeks tosta?
> Oppilas: Täst vois päästä, koska täs on… Pariton määrä näitä.
> Anna: Ahaa, okei. Sä oot siis sitä mieltä, et jos on niinku pariton määrä ni sit pääsis ulos, niinkö?
> Oppilas: …Joo. Täs toimii sama ku mikä tossakin.
> Anna: No testaileppa vähä. Katotaan kohta ootko oikeessa. …Nyt ku sä oot keksiny jonkunnäköisen teorian, ni testaa sitä. Sul oli tää ajatus et parittomasta pääsee ulos ja parillisesta ei, ni pääseekö tästä? Nyt sun pitäis sitte saada se teoria todistettua. Tässähän on parillinen määrä, testaa, mä kysyn sulta kohta miten kävi.

Oppilaiden matemaattinen selittäminen on usein vielä epämääräistä ja puheenvuorot lyhyitä verrattuna opettajan puheeseen, mutta oppilaan ilmaisua voidaan tarkentaa kysymyksin, jotta vastaukseen saadaan lisää tarkkuutta ja selvyyttä (Pimm 1987, 28–31). Sanomalla oppilaan puolesta ajatuksen ”parittomasta määrästä huoneita pääsee ulos” ja toistamalla sen vielä seuraavassa puheenvuorossaan, Anna saattaa selkiyttää oppilaan ajattelua, mutta toisaalta myös vie oppilaalta mahdollisuuden selkiyttää itse ajatuksensa sanoiksi. Oppilaan saadessa itse muotoilla ajatuksensa sanoiksi hän samalla selkeyttää ja organisoi ajatuksiaan itselleen (Pimm 1987, 23). Lisäksi oppilaan puheenvuorojen ei välttämättä tarvitse olla täydellisesti muotoiltuja, jotta ne olisivat menestyksekkäitä oppimistilanteita (Pimm 1987, 42). Anna ohjaa oppilasta testaamaan teoriaansa uusissa tilanteissa eikä anna oppilaan tyytyä ratkaisuunsa. Testatessaan useampia labyrintteja, oppilaan hypoteesi joko vahvistuu tai se osoittautuu toimimattomaksi. Lisäksi Pólya (1962, 66) toteaa, että löydettyä ratkaisumetodia tulee aina testata useammin kuin kerran, vaikka sen avulla olisi päädytty haluttuun ratkaisuun.

Annan käytöksestä huomasi, että hän ei odottanut oppilaiden löytävän ratkaisua ongelmatehtävään niin nopeasti. Pehkosen (2006, 127) mukaan ongelmanratkaisuun keskittyvillä oppitunneilla opettajat saattavat noudattaa liikaa alkuperäistä oppituntisuunnitelmaansa, jolloin monia oppilaan ongelmanratkaisuprosessin ja matemaattisen ymmärtämisen kannalta hyödyllisiä reittejä jää tutkimatta. Huomatessaan oppilaiden olevan odotettua nopeampia löytämään ratkaisun annettuun ongelmaan, Anna ohjaa oppilaitaan etsimään uusia näkökulmia ongelmatehtävään eikä tyydy yhteen löydettyyn ratkaisuun.

> Anna: Nyt mä toivon ku mietitte niitä ratkaisuja, että miksi siitä ensimmäisestä labyrintista ei pääse ulos. Miksi tästä pääsi *(osoittaa 3x3 labyrinttia)*? Miksi siitä seuraavasta *(4x4 labyrintti)* ei pääse?
> Oppilas: Ku vain parittomasta pääsee.
> Anna: Ootko ihan varma.
> Oppilas: Oon.
> --
> Anna: -- Tääl on esitetty tämmönen teoria: parillisista neliön mallisista labyrinteista ei pääse ulos. Testatkaapa pitääkö ihan oikeesti paikkansa. On esitetty väite. Nyt pitää testata. Ja sitten jos osaat todistaa että tämä on todellakin näin kuin täällä luokassa on väitetty, niin kirjoitappa minulle perustelu, että mistäs se voisi johtua.

Anna ohjaa oppilaita todistamisajatteluun: esitettyä väitettä testataan, jolloin se vahvistuu tai hylätään. Jos oppilaat vakuuttuvat väitteen todenperäisyydestä, he kirjoittavat tehtäväpaperiin kirjallisen perustelun. Kirjallinen perustelu voi auttaa Annaa varmistumaan tunnin kuluessa tai oppitunnin jälkeen, että kaikki oppilaat ovat ymmärtäneet tunnin aiheen, vaikka hän ei ehtisikään jokaisen luo yksitellen kuuntelemaan perustelua väitteen oikeellisuudesta.

Suurin osa oppilaista keksi nopeasti säännön labyrintin ratkaistavuudesta, mutta osalla oli kuitenkin vaikeuksia ymmärtää muiden muotoilemaa sääntöä. Anna joutuikin haastavaan tilanteeseen, sillä vaikka hän yritti ohjata erästä oppilasta pohtimaan ratkaisun kannalta olennaisia seikkoja, näytti siltä, että oppilas ei joko ymmärtänyt Annan käyttämiä käsitteitä tai hänellä oli mahdollisesti joku muu syy, miksi tehtävän tekeminen ei edennyt. Opettajan läsnäolo saattoi esimerkiksi aiheuttaa paineita tai ongelmanratkaisutehtävä tuntua liian vaikealta, jolloin oppilas on haluton aloittamaan sen ratkaisua. Schoenfeldin (1992, 67; 1989, 349) mukaan oppilaan negatiiviset kokemukset ja aikaisemmat haitalliset uskomukset ja asenteet voivat myös haitata oppilaan ongelmanratkaisuprosessia.

> Anna: Näytäs. Pääseekö siitä ulos? -- Nyt oot kuullu kun on puhuttu niistä parillisista ja parittomista määristä. Niin onko tässä parillinen vai pariton määrä ruutuja.
> Oppilas: En mä tiiä.
> Anna: (laskee hiljaa ja osoittaa ruutuja.. 1,2,3, .. ,16) paljoks siin on ruutuja?
> Oppilas: 16.
> Anna: Mä en laskenu ihan loppuun asti… Parillinen tarkotti sitä et sen luvun pystyy jakaa kahdella tasan, samaan määrään. Jos sä pistät kynän tohon puoleen väliin, niin jääkö molemmille puolille labyrinttia sama määrä ruutuja.
> Oppilas: Ei.
> Anna: Taitaa nyt jäädä. Siin taitaa nyt olla parillinen määrä. Eli silloin jos tässä on parillinen määrä niin tästä…
> Oppilas: …
> Anna: Pääseekö ulos vai ei pääse ulos?
> Oppilas: Pääsee.
> Anna: No onko tässä parillinen vai pariton määrä?
> Oppilas: Pariton.
> Anna: Pariton. Ja tässä on…
> Oppilas: Parillinen.
> Anna: Parillinen. Ja se oli niin että **parittomista** pääsi ulos. Eli silloin tästä ei ilmeisesti pääse ulos, niinkö?
> Oppilas nyökkää
> Anna: No kokeileppa ottaa tuosta paperia ja keksiä vielä näihin kahteen joku toinen tapa päästä ulos.

Vaikutti siltä, että oppilas vastasi opettajan kysymyksiin vain päästäkseen tilanteesta pois. Kun Anna laskee labyrintin ruutuja ääneen osoittaen ruutua, oppilas ei pysty itsenäisesti jatkamaan ruutujen laskemista, vaan antaa vastauksen, jolla uskoo selviävänsä tilanteesta. Anna tyytyy toistamaan väitteen “parittomista pääsee ulos” faktatietona ja eriyttää oppilaan työskentelyä alaspäin pois ongelmanratkaisusta. Tällöin oppilaan tehtävä oli piirtää erilaisia ratkaisuvaihtoehtoja ja hyväksyä esitetty väite totena. Annan ohjausta tässä tilanteessa voidaan pitää passivoivana ohjauksena, sillä hän ei edistä oppilaan ongelmanratkaisuprosessia (Hähkiöniemi ym. 2012). Tosin tässä tilanteessa oppilaan ongelmanratkaisuprosessi oli pysähtynyt tai ei ollut alkanut lainkaan.

Vaikka vastaus annetaankin oppilaalle valmiina voi oppilas vastausta tutkimalla ja strategiaa käyttämällä keksiä itse uudestaan ratkaisun (Pólya 1962, 64). Opettaja voi kuitenkin myös haitata oppilaan ongelmanratkaisuprosessia, itseohjautuvuutta ja luovuutta antamalla liikaa vihjeitä, jotka askel kerrallaan johdattelevat oppilasta kohti oikeaa vastausta (Stehlikova 2006, 19). Pelkästään Annan ja oppilaan keskustelua seuraamalla on vaikea arvioida oppilaan ongelmanratkaisuprosessin sujumista tai oppilaan ymmärrystä tehtävästä.

Ongelman ja ratkaisun laajentaminen

Anna ohjasi oppilaita testaamaan neliölabyrinteille rakennettua hypoteesia ongelmatilanteessa, jossa tehtävän alkuehtoja muutetaan. Hähkiöniemen ym. (2012) mukaan onkin tärkeää, että löydettyään ratkaisun oppilaat palaavat alkuperäiseen ongelmaan ja valitsevat uuden näkökulman tutkittavaksi. Annan oppilaat eivät valinneet itse uutta näkökulmaa, vaan Anna ohjasi oppilaita rakentamaan suorakulmion mallisia labyrintteja ja testaamaan hypoteesiaan niissä. Keksiminen ja luovuus pääsevät ongelman laajennuksessa valloilleen:

> Oppilas: Ope? Voiks tän oven laittaa minne haluaa, onks sen pakko olla täällä?
> Anna: No ihan kuule pistä mihin haluat. Mut niin et sen pitää olla kyl eri paikassa sen sisäänmenon ja ulosmenon.
> Oppilas: No joo se on keskellä.

Oppilaiden muodostaman hypoteesin mukaan neliön mallisen labyrintin ratkaiseminen oli mahdollista silloin, kun labyrintissa oli pariton määrä huoneita. Tämä hypoteesi vahvistui oppilaiden testatessa sitä ja se hyväksyttiin yhdessä todeksi. Erot suorakulmion muotoiseen labyrinttiin alkavatkin muodostua, sillä suorakulmion muotoisessa labyrintissa huoneiden kokonaismäärän parittomuudella ei ole merkitystä. Ulospääsy on mahdollinen jos suorakulmion muotoisen labyrintin ainakin toisella sivulla on pariton määrä huoneita. Tällöin hypoteesi muuttuu ja muutettua hypoteesia voidaan soveltaa myös neliön mallisiin labyrintteihin.

Anna yritti ohjata oppilaita tekemään suorakulmion muotoisia labyrintteja, joissa on parillinen määrä huoneita. Oppilaat eivät kuitenkaan saaneet rakennettua sellaista labyrinttia, jossa olisi parillinen määrä huoneita ja josta olisi mahdollista päästä ulos. Vaikka sellaisia labyrintteja on runsaasti (esim. 5x4 labyrintti, jossa

20 huonetta) oppilaat tuntuivat rakentavan labyrintteja, jotka vahvistivat aiempaa hypoteesia:

> Anna: Tuleeko sulle parillinen vai pariton määrä huoneita?
> Oppilas: Pariton.. -- Täst pääsee ulos.
> Anna: Eli jos on suorakulmio niin parittomista pääsee ainakin ulos. No mitä tapahtuu parillisille?
> Oppilas: noo, en oo viel testannu.
> Anna: Täällä olis tässä tulossa tällanen parillinen et nythän te voitte testata.
> Oppilas: Mul oli äsken parillinen enkä päässy siit ulos.
> Oppilas 2: Mul pääsee täst ulos.
> Anna: Onko sulla parillinen vai pariton määrä huoneita?
> Oppilas 2: Pariton.
> Anna: Pariton. Mmm..

Anna ei kuitenkaan antanut ryhmän tyytyä rakennettuihin labyrintteihin, vaan ohjasi heitä jatkamaan työskentelyä. Lopulta yksi ryhmäläisistä rakensi hypoteesin kumoavan labyrintin (9x10 labyrintti) ja Anna antoi ryhmälle tehtäväksi ratkaista sen.

> Anna: Juhuu Kallen pöytäkaverit, löysittekö Marian labyrintista ulospääsyn?
> Oppilas: Joo.
> Anna: Oliks siinä parillinen vai pariton määrä?
> Oppilas: Parillinen.
> Anna: Ja pääsi ulos?
> Oppilas: Joo. --
> Anna: Ja siin oli parillinen määrä? Pääskö Eetu?
> Oppilas 2: Joo!
> Anna: Hyvä! Mitä me voidaan sitten päätellä sitten siitä säännöstä? Toimiiko se sama sääntö tota suorakulmion mallisissa?

Oppilaat olivat aluksi hämmentyneitä, kun ryhmissä alkoi löytyä muitakin labyrintteja, joissa oli parillinen määrä huoneita, mutta joihin oli mahdollista löytää ratkaisu. Tunnin lopussa Anna pyysi vielä oppilaiden huomion viimeiseen yhteenvetoon:

> Anna: Hei nyt se viimeinen kysymys tästä tunnista. -- Aika moni teistä huomasi, että suorakulmio, jossa on parillinen määrä ruutuja ni sieltä pääsee ulos. Mut miksi sieltä pääsee ulos (näyttää dokumenttikameralla 7x10 ruudukon)? Tytöt? Miksi pääsi ulos?
> Oppilas: Koska se ei oo neliö ja siin on pariton ja parillinen luku.
> Anna: Eli kun siellä on toinen näistä sivuista ni siel on pariton määrä näitä huoneita, ja toisessa on parillinen määrä, ni se on nyt siinä se niin sanottu juju, miten tuosta suorakulmion mallisesta labyrintista pääsee ulos. Loistavaa.

Anna ehti oppitunnin lopussa vielä keräämään löydetyt havainnot yhteen, mutta ei tuonut kuitenkaan esille sitä, miten neliölabyrintin hypoteesia voisi mahdollisesti korjata niin, että molempiin labyrintteihin pätisi sama hypoteesi.

6.1.2 Ongelmanratkaisustrategiat

Metakognitiiviset strategiat

Annan oppilaat olivat ennen tarkasteltua tehtävää ratkaisseet jo useita ongelmanratkaisutehtäviä ja näyttivät olevan kokeneita ongelmanratkaisijoita. Oman ratkaisun selittäminen tuntui kuitenkin monista vaikealta, etenkin koska labyrintin ratkaisumenetelmän löytäminen näytti olevan monella kokeileminen. Oppilaat havaitsivat itse, milloin ratkaisua ei löytynyt yrityksistä huolimatta ja alkoivat muodostaa hypoteesia ratkaistavuudesta. Oppilaiden ajatusprosessia on kuitenkin vaikea arvioida pelkästään yhdellä oppitunnilla tapahtuneen käytöksen perusteella. Anna ohjeisti vaikeuksissa olevia oppilaita etenemään prosessissa vaihe vaiheelta, mutta suurin osa oppilaista eteni itsenäisesti eikä varsinaista opettajan ajatuksien auki puhumista tapahtunut, lukuun ottamatta Annan mallinnusta siitä, miten todistamisessa tuli edetä:

> ”On esitetty väite. Nyt pitää testata. Ja sitten jos osaat todistaa että tämä on todellakin näin kuin täällä luokassa on väitetty niin kirjoitappa minulle perustelu.” (Anna)

Ratkaisustrategiat

Labyrintteihin löytyi runsaasti erilaisia ratkaisureittejä ja Anna ohjasi oppilaitaan etsimään niitä. Osa Annan oppilaista pohti erilaisten strategioiden siirtämistä uusiin labyrintteihin.

> Oppilas: Tähän vois varmaan samal taval saada tehtyä?
> Anna: No kokeile, voisit soveltaa.

Erilaisia ratkaisuvaihtoehtoja pohdittiin myös opettajan johdolla yhdessä luokan kanssa, niin että oppilaat esittivät omia ratkaisujaan ja yrittivät selittää, miten löysivät ulospääsyreitin:

> Oppilas: No mä vaa lähin tekee siihen jotain ihme koukeroo, ja katoin meneekse läpi.
> Anna: Tää on erilainen, hauska. Onko joku tehnyt vähän samantyyppisen? Sanoit että sinä lähdit kokeilemaan, sillä tavalla se synty? Lähtikö joku muukin vain kokeilemaan ensin, että miten sielt pääsee ulos?

Kokeileminen näytti olevan ensisijainen ratkaisustrategia oppilaiden labyrinteissa. Toimiva strategia näytti kuitenkin siirtyvän myös isompiin labyrintteihin, jolloin ratkaisut eivät olleet enää niin sattumanvaraisia.

Anna: Huomaatte, et sitä sakaraideaa voi hyödyntää aika monella eri tavalla näissä labyrinteissa.
Anna: -- Sulla on keskellä tollainen suora ja reunoilla aallot.
Oppilas: Joo.
Anna: Onko joku keksinyt samanlaisen kuin Emmi? Tämä on ihan uudenlainen, hyvältä näyttää. Sovelsitko sitä tänne alemmas?
Oppilas: Joo.

Anna teki ääneen huomion ratkaisun siirtämisestä muihin labyrintteihin. Tämä oli tärkeä huomio, jotta ratkaisua ei tarvitse lähteä etsimään täysin sattumanvaraisesti etenemällä, koska yhdessä labyrintin huoneessa sai käydä vain kerran. Näytti siltä, että Annan ei tarvinnut huomauttaa juuri lainkaan oppilaiden tekemistä virheellisistä ratkaisuista ja tunnin pääongelmaksi ei muodostunut ratkaisureittien löytyminen, vaan suurin osa oppilaista näytti keksivän erilaisia reittejä suhteellisen helposti.

6.1.3 Oppilaiden uskomukset ja asenteet

Annan oppitunneilla oli välitön ja rauhallinen tunnelma ja oppilaat uskalsivat rohkeasti esittää muille omia ratkaisujaan ja yrittivät pukea keskeneräisiä ajatuksiaan myös sanoiksi.

Oppilas taululla: Näytänks mä?
Anna: Näytä ja selitä vaikka.
Oppilas: En mä osaa selittää.
Anna: Osaat selittää.
Oppilas: En mä tiiä mä vaa lähin tekee… Mä yritin eka tohon (4x4) tehä tota samaa mut sit tajusin et tähänki (5x5) vois tehä sitä samaa juttuu.

Anna käytti paljon positiivisia adjektiiveja oppilaiden työskentelyä seuratessaan ja kannusti kokeilemaan.

Anna: Mites täällä?
Oppilas: Mä taisin tehä näit huoneit vähä liikaa…
Anna: Ei se mitään. Siitä tulee vain iso labyrintti, sehän on hieno.

Epäonnistuneisiin yrityksiin suhtauduttiin positiivisesti, eikä niitä sivuutettu kommentitta.

Oppilas: Tost jää joku..
Anna: Nii jää, siit jää joku aina välistä. Totta, mut se on hyvä testata kuitenkin… Melkein keksit! Mut siitä ei vaa pääse, tarvitsis vähä lisää ruutuja.

6.2 Eeva – alkuehtojen ymmärrys reflektointivaiheen ongelmana

Eevan oppilaat ratkaisivat labyrinttitehtävää pareittain tai kolmen hengen ryhmissä. Oppilaat saivat tunnin alussa tehtäväksi etsiä tehtäväpaperin labyrinteista ainakin yhden ulospääsytavan. Lisätehtävänä oli rakentaa oma labyrintti värittämällä labyrintin ruudut kuten shakkilaudassa. Tehtävänanto osoittautui oppitunnin ongelmaksi, sillä oppilaat olettivat tehtävänannon perusteella, että jokaisesta labyrintista löytyisi ulospääsy, vaikka näin ei todellisuudessa ollut. Oppitunnin keskeisimmäksi ongelmaksi muodostui ulosmenoreitin löytyminen labyrintteihin.

6.2.1 Matemaattinen sisältö ja konteksti

Matemaattinen sisältö ja ongelmanratkaisun sitominen laajempaan kontekstiin jäivät Eevan oppitunneilla vajaaksi. Eevan oppilaille jäi tehtävänannosta ilmeisesti epäselvä kuva ja esimerkiksi todistamisajatteluun johdattelua ei syntynyt. Koska varsinaiseen ratkaisuvaiheeseen kului suurin osa tunnista eikä ongelmanratkaisusta näyttänyt nousevan vahvasti mitään selkeää näkökulmaa, jonka Eeva olisi nostanut tunnin tavoitteeksi, myös reflektointivaihe jäi vaillinaiseksi. Oppitunnille tarkoitettu ongelman laajennus jätettiin ajan puutteen vuoksi kotitehtäväksi.

Ongelmanratkaisun avulla opitut sisällöt

Eevan oppilailla oli vaikeuksia muodostaa hypoteesia labyrinttien ratkaistavuudesta, sillä he olivat muodostaneet tehtävänannon perusteella ennakko-oletuksen, että kaikilla labyrinteilla oli ainakin yksi ratkaisu. Tällöin oppilaat työskentelivät turhautumiseen asti mahdottomienkin labyrinttien parissa. Näytti siltä, että Eevakaan ei ollut täysin hahmottanut sitä, että osa labyrinteista on mahdottomia ratkaista. Oppilaat työskentelivät pitkäjänteisesti labyrinttien parissa, välillä turhautuen ja välillä kokien näennäisiä onnistumisen hetkiä, jotka kuitenkin tarkemmassa tarkastelussa osoittautuivat virheellisiksi:

> Oppilas: Nyt onnistu!
> Eeva: Onnistuko?
> Oppilas: tos, tos tos, mä olen fiksu!
> Eeva: Joo, eli neljä kertaa neljä --… Siis te onnistuitte! Hyvä! Tosi hienoo! *(Huom: 4x4 labyrinttiin ei ole mahdollista löytää ratkaisua)*

Koska kaikkiin labyrintteihin ei ollut ratkaisuja, oppilaat jättivät tehtävän alkuehtoja huomioimatta:

> Oppilas: Nyt tää onnistu!
> Eeva: Onnistukse? Et sä tuolla käyny!
> Oppilas: Pitääks siel käydä?
> Eeva: Tottakai, kaikissa pitää käydä!

Erityisesti yksi oppilaspareista oli turhautunut parillisten labyrinttien ratkaisujen kanssa. Eeva pohti, että auttaisiko parien vaihto ratkaisujen syntymistä, mikä sai oppilasparin työskentelemään erityisen ahkerasti parillisen labyrintin ratkaisun parissa. Sosiaalinen paine ei kuitenkaan aina auta ratkaisun löytymisessä, vaan jumissa olevia oppilaita tulisi rohkaista ja kannustaa positiivisesti (Mason ym. 1985, 150). Eeva pyrkikin kannustamaan turhautuneita oppilaitaan.

> Oppilas: Miks tota yhtä ruutuu ei vois ottaa pois tosta ku muuten mä saisin!
> Eeva: Kyl se onnistuu!
> Oppilas: Se on niin ärsyttävä ku se pilaa aina kaiken!

Oppilaspari huomasi, että jatkuvasti jokin osa labyrintista jää käymättä ja näin ollen ratkaisu ”menee pilalle”. Oppilaat eivät kuitenkaan huomioineet mahdollisuutta, että ratkaisua ei välttämättä ole lainkaan olemassa. Oppilaat ehdottivat opettajalle, että osa labyrintista jätetään huomiotta, jotta he löytäisivät ulospääsyn ja päätyivät lopputulokseen, että tehtävässä on virhe.

> Oppilas: Onks tää oikein, mä jotenki yritin laittaa ton ruudun tuolt ku toi ruutu on ilonpilaaja.
> Eeva: No mut eihän tos ruudus oo kukaa ollu?
> Oppilas: Noh, leikisti!
> Eeva: No ei oo ollu ees leikisti. ---
> Oppilas: Onks tää oikein?
> Eeva: No tossa oot kaks kertaa!
> Oppilas: No voihan ihminen! Ngggh. Ihan tyhmä ruutu! Ei ei ei, ei tää nyt näin mee. No tällee, nyt se meni oikein.
> Eeva: Sä oot tossa edelleenkin kaks kertaa tässä ruudus.. --
> Oppilas: Täs on yks ruutu liikaa, siin on virhe!
> Eeva: Miksette kokeile tota nyt? Tähän löytyy toinenkin ratkaisu.
> Oppilas: No riittääks et saadaa jompa kumpa?
> Eeva: Riittää. Mut tää on vielki tekemättä. Keskittykää nyt tähän ja tähän.

Eeva ohjasi turhautuneita oppilaita muiden tehtävälabyrinttien pariin. Oppilaiden työskentely oli menossa kohti hypoteesia, että tehtävässä on virhe. Ajan kanssa oppilaat olisivat saattaneet huomata ilman ohjaustakin, että tehtäväpaperissa oli muitakin ”virheellisiä” labyrintteja. Suurin osa oppitunnista kului kuitenkin ratkaisuja etsiessä, eivätkä oppilaat näyttäneet pääsevän ajattelussaan päätelmään, että osa labyrinteista oli mahdottomia. Kyseinen oppilaspari ei ennen Eevan kehotusta halunnut siirtyä seuraavaan labyrinttiin: ratkaisematon, alussa yksinkertaisen näköinen tehtävä aiheutti oppilaille todellisen ongelmatilanteen ja ratkaisun löytymättä jääminen näytti nostattavan turhautumisen tunteita. Myös muita oppilaspareja ohjattiin siirtymään eteenpäin, koska ratkaisuja ei näyttänyt löytyvän.

> Eeva: Löydätteks te yhtää, hei nyt pitää löytyy joku vaihtoehto. Kokeilkaas jotain toista jos toi eka ei onnistu.

Koska opettaja itse ei tuonut esille missään vaiheessa sitä, että osaan tehtäväpaperin labyrinteista ei ollut olemassa ratkaisua, voidaan olettaa, että hän ei ollut joko tietoinen asiasta tai ei muistanut sitä. Päätelmän voi tehdä esimerkiksi siitä, että hän ei nostanut pohdintaan tunnin aikana oppilaiden pohdiskeluja tehtäväpaperin virheistä ja ohjauksesta jäi kuva, että hän oletti kaikkiin labyrintteihin löytyvän ratkaisuja:

> Oppilas: Onkse oikein vai ei?
> Eeva: Juu.. On. No hei laittakaa nimenne siihen… Hei te ootte tosi hienosti! Ihan mielettömän hienosti! Aaa. Täs on virhe, tos ette oo käyneet! Öö, pieni korjaus!
> Oppilas: Joo.
> Eeva: Ihan pieni virhe mut se on helppo korjata.

Koska monella parilla oli vaikeuksia labyrinttitehtävien kanssa, Eeva pyytää yhden pareista esittämään löytämiään ratkaisuja yhteisesti. Oppilaat esittävät ratkaisut 4x4, 5x5, 6x6, 7x7 ja 8x8 ruudukoihin. Parillisissa ruudukoissa (4x4, 6x6 ja 8x8) oli virheelliset ratkaisut.

> Eeva: Hei kattokaas, pojat tulee näyttää, ne on tehneet tän. Katsokaa kaikki tonne.
> Eeva: Aika hienosti ratkaistu! Hyvä! Tää oli hieno. (ratkaistu otetaan pois)
> Oppilas: Hei sähän sanoit meille et tollee ei saa mennä, miks noi sit saa?
> Eeva: Miten tehä?
> Oppilas: Näytä hetki! Tollee ku, ne menee tollee!
> Eeva: Hei tää meneeki eestaas, niin onki muuten. Eli se pitääki mennä tuolta. Joo, mä katoin väärin, toi oliki väärin. Hyvä ku huomasit.

Oppilaat eivät ole täysin tyytyväisiä näytettyihin ratkaisuihin ja vaativat lisäselvitystä. Virhe kuitenkin kuitataan ylimalkaisella vastauksella ”sen pitääkin mennä tuolta”. Oppilaiden tehtäväpaperit alkoivat jo lukuisten ratkaisuyritysten jälkeen olla niin sekavia, että oppilaat itsekin menivät reiteistä sekaisin. Näytti myös, että Eevakin hyväksyy ratkaisut, jotta oppilaat voisivat edetä seuraaviin labyrintteihin.

> Oppilas: Nyt mä tein tän! Kyl se on oikein, siin on kaikki ruudut käyty!
> Eeva: Sä oot tarkistanu sen? Mistä toi menee.
> Oppilas: Tää menee niinku tällee.
> Ope: Joo ja tuolta. Meneekse tuolta vai tosta? …Tee nyt vähä selvemmäks. Käyks tossa? Tos se käy, joo. Kyl se must ois oikein.
> Oppilas: Mut käykse tossa?
> Oppilas 2: Käyhän.
> Eeva: Joo. Sit tee toi.

Ongelmanratkaisutehtävä osoittautui erityisen vaikeaksi, koska sen alkuehdot hämmensivät oppilaita. Oppilaat olivat itsekin epävarmoja löydetyistä ratkaisuista, mutta näytti, että sekä oppilaat itse, että opettajakin halusivat jo edetä eteenpäin tehtäväpaperissa. Labyrinttitehtävässä ei onnistuttu ajattelemaan luovasti, vaan oppilaat ja opettaja yrittivät parhaansa löytääkseen rutiinitehtävänomaisen ”oikean” ratkaisun tehtävään.

Labyrinttitehtävässä oli mahdollisuus vahvistaa oppilaan matemaattista perustelemista ja ohjata kohti todistusajattelua. Oppilaat eivät kuitenkaan oppitunnilla päässeet pohtimaan tätä sisältöä. Labyrintin ratkaisua voidaan pitää suljettuna ongelmana, sillä parittomilla labyrinteilla on äärellinen määrä ratkaisuja ja parillisilla labyrinteilla ratkaisua ei ole lainkaan. Matemaattisen sisällön kannalta olisi ollut hyödyllistä pohtia esimerkiksi tehtävän virheellisyyttä, jota osa oppilaista ehdotti, vaikka varsinaiseen todistusajattelua tai matemaattista perustelemista ei käsiteltäisikään. Vaikka ongelmanratkaisu ei aina onnistu ja oppilas päätyy hylkäämään tehtävän, se ei tarkoita etteikö oppilas voisi oppia ongelmanratkaisusta jotain (Mason ym. 1985, 61). Epäonnistuneen ongelmanratkaisutehtävän jälkeen oltaisiin voitu pohtia syitä tehtävän ratkaisun löytymättömyyteen ja pohtia käytettyjä strategioita, jotka johtivat virheellisiin ratkaisuihin.

Ongelman ja ratkaisun laajentaminen

Ongelman laajentamiselle ei Eevan oppitunnilla jäänyt aikaa ja Eeva jättikin sen kotitehtäväksi:

> Eeva: Teette kotona tämmösen sokkelon. -- Eli teette ruutupaperille oman labyrintin värittämällä ruudut niin kuin shakkilaudassa. Huomaatteks te täs shakkilaudas jotain erikoista? Mitä? -- Jos täältä aloitetaan ja tänne lopetetaan

> (näyttää mustia ruutuja alun ja lopun kohdalla) ja täs on sama määrä, on kuus näin ja kuus näin, ni mitä siinä on yhteistä nyt. Tolla päällä ja tolla päällä. Jos täältä alotatte ja tänne päättyy ni mikä tässä on? Mikä näis on samaa?
> Oppilas: Ne molemmat on mustia.
> Eeva: Kyllä, helppoa. Kokeilette niin, että on yhtä paljon molempiin suuntiin tai sitten on eri määrä, teette omanlaiset mut teidän täytyy ratkaista se labyrintti. … Teette oman labyrintin ja samat ohjeet eli kerran vaa saa käydä omassa huoneessa ja mä haluun et teette siit tommosen shakkilaudan, väritätte niinku shakkilaudan.

Eevan alkuperäinen ajatus lienee ollut, että oppilaat huomaavat sisäänkäynnin ja uloskäynnin kohdalla olevat mustat ruudut (parilliset labyrintit), jolloin ratkaisua ei löydy tai vaihtoehtoisesti sen, että sisäänkäynnissä ja uloskäynnissä on eriväriset ruudut, jolloin ratkaisu löytyy. Tällöin oppilaiden ei välttämättä tarvitsisi pohtia ensin parillisuutta tai parittomuutta ja riittäisi, että he huomaisivat eri väriset ruudut sisään – ja ulosmenossa. Tässä aineistoissa ei kuitenkaan analysoitu kotitehtävän ratkaisuja, mutta voidaan ajatella, että osa oppilaista ei pysty ilman ohjausta päätymään tulokseen, että kaikista labyrinteista ei pääse ulos.

6.2.2 Ongelmanratkaisustrategiat

Metakognitiiviset strategiat

Eeva ohjasi oppilaita palaamaan ongelmanratkaisuprosessissa työskentelyvaiheesta alkuehtojen tarkasteluun, jos näytti siltä, että oppilas ei ratkaisussaan ollut huomioinut labyrinttitehtävässä annettuja ehtoja. Hän ei kuitenkaan mallintanut muuten ongelmanratkaisuprosessin tai työskentelyvaiheen etenemistä. Schoenfeldin (1985, 27) mukaan kontrollilla on tärkeä osuus ongelmanratkaisuprosessissa kun oppilas tarkastelee ja arvioi omaa toimintaansa ja ratkaisusuunnitelmansa toimivuutta ja sen mahdollista hylkäämistä. Eevan oppilaiden ratkaisustrategia näytti olevan reittien piirtäminen yrityksen ja erehdyksen kautta, eivätkä he olleet valmiita hylkäämään menetelmää tai siirtymään toisiin labyrintteihin ilman Eevan ohjausta.

> ”Miksette kokeile tota nyt? -- Mut tää on vielki tekemättä. Keskittykää nyt tähän ja tähän.” (Eeva)

Eeva ei ottanut oppitunnilla esille metakognitioon liittyviä osa-alueita. Toisaalta tämä voi johtua siitä, että oppilaat eivät päässeet selkeisiin ratkaisuihin tai johtopäätöksiin labyrinttitehtävän parissa. Lisäksi näytti siltä, että aika loppui kesken ja osa suunnitelluista sisällöistä jäi kotitehtäväksi.

Ratkaisustrategiat

Oppilaiden tehtävänä oli etsiä useita erilaisia reittejä labyrintteihin, mutta koska suurin osa oppitunnin ajasta kului parillisten labyrinttien ratkaisujen etsimisessä, ei tunnilla kiinnitetty juurikaan huomiota erilaisiin ratkaisustrategioihin. Eeva lähinnä tyytyi huomauttamaan virheellisistä ratkaisuista tai ehdotti jopa itse ratkaisua. Hähkiöniemen ja Leppäahon (ks. Hähkiöniemi ym. 2012) mukaan ohjaus, jossa opettaja paljastaa olennaisia osia ratkaisusta on oppilasta passivoivaa ohjausta.

> Eeva: Saaks tätä tehtyy toisel taval?
> Oppilas: Oikein toi?
> Eeva: On oikein, mut saaks sen toisel taval tehtyy? …Tääl te ootte nyt kaks kertaa samassa. Eiks tos kannattais mennä tonne, tuolt läpi ja tonne.
> Oppilas: Nii.

Ratkaisustrategiana oppilaiden labyrinteissa näytti olevan kokeileminen. Sitä ei kuitenkaan tuotu esille yhteisesti tai pohdittu yksittäisten parien kanssa. Kokeilemalla tarpeeksi monta kertaa, oppilaat onnistuivat löytämään ratkaisun myös mahdottomiin labyrintteihin – toisin sanoen oppilaat piirsivät ratkaisuja sattumanvaraisesti niin, että eivät lopulta huomanneet käyneensä labyrintin huoneissa useita kertoja tai jättäneensä osia labyrintista käymättä.

6.2.3 Oppilaiden uskomukset ja asenteet

Eevan oppilaat olivat sinnikkäitä ongelmanratkaisijoita ja turhautumisista huolimatta jatkoivat tehtävän parissa. Eeva kehui oppilaiden onnistuneita ratkaisuja ja kannusti oppilaita, kun ratkaisujen löytyminen tuntui hankalalta. Oppilaat saivat myös ilmaista Eevalle ongelmanratkaisuun liittyviä negatiivisia tunteita oppitunnin aikana. Masonin ym. (1985, 49) mukaan omien tunteiden ilmaisu voi auttaa oppilasta ongelmakohtien selvittämisessä, sillä se vapauttaa henkisiä resursseja ja mahdollistaa keskittymisen ratkaisun etsimiseen. Vaikka kaikkiin labyrinttitehtäviin ei ollut olemassa ratkaisua, Eeva kuvaili niitä oppilaille ohimennen ”helpoiksi” ja esitti myös, että mahdottomien labyrinttien väärin tehtyihin ratkaisuihin on olemassa ”helppo korjaus”. Tällaiset kuvaukset voivat aiheuttaa oppilaissa turhautumisen tunteita jos väitettyjä helppoja ratkaisuja ei löydykään.

6.3 Ilona – havainnoista säännön muodostukseen

Ilonan oppitunnilla oppilaat työskentelivät pareittain tai pienissä ryhmissä. Ilonan ongelmanratkaisutunnin näkökulmaksi oli valittu erityisesti hypoteesien luominen, niiden testaaminen ja johtopäätösten tekeminen. Oppilaat pohtivat sekä sitä, miten ratkaisujen määrä kasvaa parittomien labyrinttien koon kasvaessa että mikä vaikuttaa labyrintin ratkaistavuuteen. Ilona keskittyi ohjaamaan oppilaita pienissä ryhmissä ja oppilaat tekivät paljon hyviä havaintoja työskentelyvaiheen aikana, mutta varsinainen yhteinen luokkakeskustelu, jossa havainnot olisi koottu ja tiivistetty yhteen jäi oppitunnilta puuttumaan.

6.3.1 Matemaattinen sisältö ja konteksti

Ilonan oppitunnilla keskeistä oli kahden eri hypoteesin testaaminen: 1. Mitä tapahtuu ratkaisureittien määrälle kun labyrintti suurenee? 2. Mikä vaikuttaa labyrintin ratkaistavuuteen? Lisäksi Ilona odotti oppilailtaan matemaattisen puheen tuottamista ja hän kiinnittikin siihen erityishuomiota kuunnellessaan oppilaiden matemaattista selittämistä. Oppitunnilla ei käsitelty ongelman laajentamista esimerkiksi suorakulmion muotoisiin labyrintteihin.

Ongelmanratkaisun avulla opitut sisällöt

Oppilaat etsivät reittejä labyrintteihin ja muodostivat arvauksia sen mukaan, kuinka monta saivat löydettyä. 3x3-labyrinttiin on olemassa kaksi erilaista ratkaisuvaihtoehtoa. Osa oppilaista oli löytänyt kuitenkin useamman ratkaisun, mutta osa löydetyistä ratkaisuista oli kuitenkin virheellisiä. Ilona ohjasi oppilaita tutkimaan suurempien labyrinttien ratkaisuja, jotta oppilaille alkaisi hahmottua jokin säännönmukaisuus labyrinttien reiteissä.

> Ilona: Nyt sitä ajattelua saattaa auttaa et katsotte mitä siinä kakkosessa nyt kysytään ja katsotte mitä tapahtuu kun se labyrintti suurenee. Löytyyks siit joku järki, joku systeemi, joku ajatus millä vois päätellä jotain siitä.

Kokonaisuuden tarkastelu saattaa auttaa oppilaita huomaamaan, että pienimmässä tarkastellussa labyrintissa on vain kaksi ratkaisua ja että ratkaisujen määrä kasvaa labyrintin kasvaessa. Ilona ohjasi oppilaita myös tarkastelemaan kriittisesti omia päätelmiään:

> Ilona: Entäs jos tekee jollain muulla tavalla, ni onks tää kolme lopullinen ja viimeinen sana? Ensin te väititte et pääsee kahta reittiä, ja nyt Mari tossa todistaa et haha, pääseeki kolmea reittiä. Ja nyt pitäis miettiä et onkse kolmekaan viimeinen sana siinä et löytyiskö joku muu. Ettei käy niin et teidän sääntö on puuttellinen. -- Voitte hioa vielä tätä sääntöä jos se ei olekaan kolme. Ja sitten vielä et voisko se olla semmonen, et te saatte selville sen kuinka monta niitä reittejä oikeasti on.

Labyrinttien reittien kasvua tutkittiin yhdessä luokan kesken, mutta Ilona ei näyttänyt oppilaiden ratkaisuja tai koonnut oppilaiden havaintoja niin, että niistä olisi voinut tehdä induktiivisesti päätelmiä reittimäärästä suhteessa labyrintin kokoon.

> Ilona: Nyt aika moni pystyi ratkaisemaan tän sokkelokysymyksen ja kaikki parit päätyivät siihen että kuinka monta reittiä tämän sokkelon läpi saattoi keksiä. Montaks niit oli? Ihan sen oman tutkimuksen perusteella?
> Opp: Kaksi.
> Ilona: Niit oli kaks eiks niin.

Labyrinttien ratkaistavuutta tutkittaessa Ilona kehotti useasti oppilaita etsimään säännönmukaisuutta labyrinteista ja tutkimaan labyrintteja ”omassa sarjassaan”. Oppilaat muodostivat hypoteesin, että vain parittomiin labyrintteihin on mahdollista löytää ratkaisu ja osa pyrki edelleen yhdistämään parittomien labyrinttien ratkaisumäärän labyrintin kokoon:

> (Oppilaan paperissa lukee: pystyy ratkaisemaan vain pariton kertaa pariton ja vain kaksi kertaa)
> Ilona: Vain kaksi kertaa mitä? Tarkoitatsä että vain kahdella eri tavalla? Hetkinen, miten mä nyt laittasin tän… Huomaatteks te mä lähen kiemurtelee tänne tällaista haamutietä. Ja mun kysymys kuuluu nyt, että jos on näin, ni onks oikeesti niin, että on vaan kaksi ratkaisua. Voitte käyttää apupaperia ja piirtää tämmösen isomman ja katsoa et jos mä lähden kiertämää tällee sikin sokin ni päädynks mä seinään, et onks väitteenne toinen osa totta, eli se että on kaksi ratkaisua.

Ilona ohjasi lisäksi oppilaita muodostamaan itse isompia labyrintteja, joissa he pystyvät ensin ennustamaan ratkaistavuutta ja sitten kokeilemaan hypoteesiaan.

Matemaattinen puhe

Ilona käytti paljon matemaattisia termejä puheessaan. Tunnilla puhuttiin säännönmuodostamisesta, formuloinnista, väitteistä ja todistamisesta. Puhumalla matemaattisin käsittein Ilona pystyi mallintamaan oppilaille matemaatikon puhetta. Pimmin (1987, 23) mukaan on tärkeää kannustaa oppilaita ajattelemaan ääneen, vaikka oppilaan matemaattinen kieli ei olisikaan vielä oikein formuloitua. Lisäksi usein opettaja pystyy asiayhteydestä päättelemään, mitä oppilas yrittää ilmaista, mutta tarpeen mukaan epämääräisiä käsitteitä voidaan selventää lisäkysymyksillä (mts. 42). Pimm (1987, 42) myös argumentoi, että liiallinen oppilaan puheen kontrollointi ja täsmällisten käsitteiden vaatimus voi olla oppilaan matemaattisille keskustelutaidoille haitallista. Ilona vaati oppilailtaan täsmällisiä määritelmiä, mutta tuntematta oppilaiden tasoa tarkemmin, on vaikea määritellä, mikä on oppilaiden puheen liikaa kontrollointia.

> Oppilas: Mä tiedän mikä täs on, koska me saatii tällee et tähän pitää lisää kaksi ja sit tohon lisätää kaks ja tän pystyy tekee. Et tähän lisätää niinku pariton luku yks.
> Ilona: Mihin, mihin lisätää?
> Oppilas: Tähän lisätää niinku yks.
> Ilona: Mikä?
> Oppilas: Yks ruutu lisää.
> Ilona: Nyt tarkkana.
> Oppilas: Rivi, yks rivi lisää.
> Ilona: Kato, mä näytän, mä piirrän sulle matikaks mitä sä sanot, mä tiiän ettet sä tarkota tätä mut mä näytän milt se kuulostaa. Lisätään tähän yksi ruutu.
> Oppilas: Siis yks rivi.
> Ilona: Nii.
> Oppilas: Tähän lisätää kaks. Sit sen pystyy tekee.
> Ilona: Öö.. Hei jos on pystyssä ni on sarake ja jos on vaakasuorassa ni on rivi. Ni muotoile nyt niitä sanoja käyttäen, sä saat sen määriteltyä mutta mä kysyn nyt, että yrittäkää muotoilla mikä näissä on yhteistä näiden kanssa, eli nyt sä oot niinku vertaillut tota ja tätä ja jotaa mikä ehkä kuuluis tohon, niinku näin vaakasuoraan, mutta yrittäkää miettiä se yhdenmukaisuus..
> Oppilas: Lisätään kumpaaki suuntaan periaattees…
> Ope: -- Jos sä sanot ”yksi” ni mieti että ”yksi mitä”. Ettet vahingossa sano ruutu.

6.3.2 Ongelmanratkaisustrategiat

Metakognitiiviset strategiat

Masonin ym. (1985, 149) mukaan ongelmanratkaisijan tulisi oppia tekemään jatkuvasti havaintoja sekä kyseenalaistamaan ja haastamaan omia ratkaisujaan. Ilona kyseenalaisti aktiivisesti oppilaiden ratkaisuehdotuksia ja mallinsi näin myös oppilaille, miten heidän tulisi itse oppia kysymään itseltään ratkaisuprosessin eri vaiheissa.

> ”Punanen reitti käy kaikissa huoneissa, mut sininen menee tästä. Mut vihreä käy kaikissa huoneissa. Eli punanen on ok, vihree on ok mut sinisessä on nyt se ongelma et se juoksee labyrintin ohi sielt alanurkasta.” (Ilona)

Ratkaisustrategiat

Ilonan oppilaat etsivät kokeilemalla erilaisia ratkaisuvaihtoehtoja labyrintteihin, mutta osa oppilaista pyrki siirtämään toimivia ratkaisuja isompiin labyrintteihin:

> Oppilas: Voiks tehä näit samoi mitä tässäki oli?
> Ilona: Miten nii samoja, mitä tarkoitat sanalla ”sama” tässä?
> Oppilas: Sillee niinku samaa kuvioista. Miten oon tehny tässäki, suoraa sivulle, siit yks alas. Sillee sama tekniikka.
> Ilona: Tottakai, tottakai, jos samalla tekniikalla pääsee labyrintin läpi ni sehän on juuri se mitä etsit, et onks tässä joku systeemi jonka avulla mä voisin päätellä jotain. Tottakai voit käyttää kaikkea mitä olet keksinyt.

Erilaisia ratkaisuja ei kuitenkaan käyty yhdessä läpi, eikä opettaja erityisesti maininnut oppilaille, minkälaisella menetelmällä ratkaisuja kannattaisi etsiä.

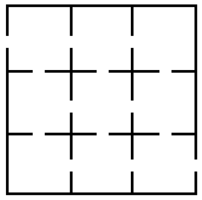
6.3.3 Oppilaiden uskomukset ja asenteet

Ilona vaati oppilailtaan tarkkaa matemaattista puhetta, mutta myös kohtelee heitä ”matemaatikkoina”, joiden tulee etsiä säännönmukaisuuksia ja muodostaa sääntöjä. Hän rohkaisee oppilaita tuottamaan matemaattista puhetta ja tekstiä.

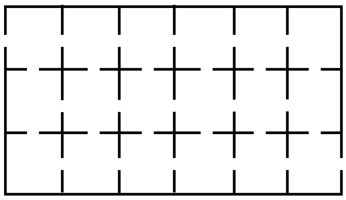
> ”Okei, no, hienosti formuloitu, täst ymmärtää heti vaikkei olis nähnyt mitä te tarkoitatte!” (Ilona)

6.4 Yhteenveto

Anna, Eeva ja Ilona valittiin tähän tutkimukseen, koska oppitunneilla nousi keskiöön toisistaan eriäviä sisältöjä, jolloin myös reflektointivaiheet muodostuivat erilaisiksi. Reflektointivaiheessa Annan oppitunnilla keskityttiin vahvasti matemaattisen sisällön käsittelyyn eli matemaattisen todistamisajatteluun johdatteluun sekä tunnin alkuvaiheessa löydetyn säännön yleistämiseen. Ohjatessaan oppilaita havaitsemaan samankaltaisuuksia labyrinttien ratkaisuista ja yleistämään tuloksia Anna toi esille laajempaa matemaattista sisältöä ongelmanratkaisutehtävän avulla. Schroederin ja Lesterin (1989, 33) jaottelua käyttämällä Annan oppitunnilla opetettiin matematiikan sisältöjä ongelmanratkaisun kautta. Oppitunneilla muotoiltiin hypoteesi tehtävän ratkaistavuudesta, jota testattiin neliönmallisissa labyrinteissa. Oppilaat testasivat hypoteesin toimivuutta myös suorakulmion mallisissa labyrinteissa ja päätyivät muodostamaan uuden säännön niiden ratkaistavuudelle (ks. kuvio 3). Uutta sääntöä ei kuitenkaan muokattu ja testattu niin, että sen avulla olisi voitu tehdä havaintoja sekä neliön että suorakulmion muotoisista labyrinteista.



Sääntö 1:
Jos neliön muotoisessa labyrintissa on pariton määrä huoneita, siitä on mahdollista päästä ulos.



Sääntö 2:
Jos suorakulmion muotoisen labyrintin toisella sivulla on pariton määrä huoneita, siitä on mahdollista päästä ulos. Labyrintin huoneiden lukumäärä ei vaikuta ratkaisuun.

Kuvio 3: Annan oppilaiden havainnot labyrinttien säännöistä

Myös Ilonan oppitunnilla pyrittiin tekemään havaintoja, ensin ratkaisuvaihtoehtojen määrästä suhteessa labyrintin kokoon ja myöhemmin labyrinttien ratkaistavuudesta. Koska oppilaat puhuivat labyrintin ratkaistavuuden kohdalle labyrintin huonerivien määrästä, voidaan ajatella että puhuessaan parittomista labyrinteista, he ajattelivat juuri labyrintin sivujen pituuksia. Yhteisesti labyrinttitutkimuksia ei kuitenkaan käsitelty ja vaikka Ilona kiinnitti huomiota erityisesti matemaattiseen puheeseen, oppilaat ja Ilona itse puhuivat parillisista ja parittomista labyrinteista määrittelemättä eksplisiittisesti sitä, tarkoitettiinko parittomuudella labyrintin kokonaishuonemäärän parittomuutta vai labyrintin sivulla olevien huoneiden lukumäärän parittomuutta. Oppilaat tekivät työskentelyvaiheen aikana havainnon, että ratkaisureitit näyttivät lisääntyvän labyrintin suuretessa, mutta yhteinen pohdinta aiheesta jäi oppitunnilla puuttumaan. Vaikka Ilona ohjasi oppilaita kirjoittamaan havaintojaan labyrinttien ratkaistavuudesta paperille ja kuunteli yksittäisten oppilaiden ja oppilasryhmien selittämistä, varsinaista yhteistä systemaattista havaintojen läpikäyntiä ja kokoamista ei oppitunnilla tehty. Yhteisen yhteenvedon kautta opettaja voi vielä hioa oppilaiden ajatuksia ja pyrkiä löytämään oppilaiden kanssa laajempia matemaattisia ajatuksia (Shimizu 1999, 110–111). Oppilaiden havainnot ratkaisuista olivat oikeita, mutta ilman johdonmukaista koontia ne saattoivat jäädä irrallisiksi.

Eevan oppitunnilla näytti siltä, että opettajan mahdollinen väärinkäsitys tehtävän ehdoista aiheutti oppitunnin ongelmatilanteen. Koska oppitunnilla ei havaittu, että kaikkiin labyrintteihin ei ole olemassa ratkaisua, tunnin työskentelyvaihe kului oppilaiden etsiessä mahdottomiin labyrintteihin ratkaisuvaihtoehtoja. Vaikka osa oppilaista ehdottikin, että tehtävässä täytyi olla virhe, ehdotukset jäivät epävarmoiksi eivätkä oppilaat ilman opettajan apua saaneet muodostettua päätelmää siitä, että osaan labyrinteista ei ollut mahdollista löytää ratkaisua. Mielenkiintoista olikin, että vaikka oppilaat tuskastelivat tehtävän kanssa, he näyttivät luottavan siihen, että kaikkiin labyrintteihin on olemassa ratkaisu. Sekä Ilona että Anna tarjosivat oppilailleen mahdollisuuden siihen, että tehtäväpaperissa saattaa olla labyrintti, josta ei pääse ulos. Tämä näytti mahdollistavan myös sen, että oppilaat päätyivät muutamien kokeilujen jälkeen luokittelemaan tietyt labyrintit mahdottomiksi. Näin ei kuitenkaan tapahtunut Eevan oppilaiden kanssa. Masonin ongelmanratkaisumallissa (1985) reflektointivaiheessa on tärkeää pohtia jumiutumisen ja ratkaisun epäonnistumisen syitä ja niihin liittyviä turhautumisen tunteita, sillä myös epäonnistuneista ratkaisuista voi oppia ongelmanratkaisua. Eevan tunnilla epäonnistuneita yrityksiä ei kuitenkaan tutkittu tarkemmin.

> ”Hei tää meneeki ees taas, niin onki muuten. Eli se pitääki mennä tuolta. Joo, mä katoin väärin, toi oliki väärin.” (Labyrinttiin ei ole olemassa ratkaisua) (Eeva)

Erilaisilla ongelmatehtävillä voidaan opettaa erilaisia näkökulmia ongelmanratkaisusta. Labyrintti-tehtävä ohjasi erityisesti opettamaan matemaattista sisältöä ongelmanratkaisun kautta. Yksi tehtävän kautta tutkittavista matemaattisista sisällöistä oli matemaattinen perusteleminen eli todistamisajatteluun johdattelu. Labyrinttitehtävässä todistamisajatteluun johdattelu palveli myös kuitenkin ratkaisustrategioiden opettamista, sillä oppilaat testasivat löydettyjä sääntöjä kokeilemalla, joka luokitellaan myös ratkaisustrategiaksi (LeBlanc 1977, 17). Ongelmanratkaisun osa-alueet ovatkin toisiinsa sekä laajempiin matemaattisiin sisältöihin kytkeytyneitä (Lesh & Zawojewski 2007, 765).

7 Luotettavuus

Tuomi ja Sarajärvi (2003, 131) esittävät, että laadulliseen tutkimusperinteeseen liittyy erilaisia käsityksiä tutkimuksen luotettavuuteen liittyvistä kysymyksistä. Laadullisissa tutkimuksissa ei välttämättä ole tarkoituksenmukaista pohtia tutkimuksen luotettavuutta validiteetin ja reliabiliteetin avulla, sillä käsitteet ovat syntyneet määrällisen tutkimuksen käyttöön ja ne vastaavat näin ollen parhaiten määrällisen tutkimuksen tarpeita (mts. 133). Sen sijaan tutkimusta tulisikin arvioida kokonaisuutena, jolloin painotetaan tutkimuksen sisäistä johdonmukaisuutta (mts. 135). Tuomi ja Sarajärvi (2003, 136–137) ovat koonneet laadulliseen tutkimuksen luotettavuuden kriteereiksi **uskottavuuden ja vastaavuuden** (credibility), **siirrettävyyden** (transferability), **riippuvuuden ja varmuuden** (dependability) sekä **vahvistettavuuden** (confirmability).

Tutkimuksen **uskottavuuteen** liittyy se, miten hyvin tutkijan rakentamat käsitteet ja tulkinta vastaavat alkuperäistä tilannetta (Tynjälä 1991). Tässä tutkimuksessa pyrin katsomaan videot useaan kertaan saadakseni hyvän kuvan oppitunneista. Videoita on lisäksi käytetty apuna myös myöhemmin sisällönanalyysin eri vaiheissa, jos opettajan tai oppilaan ilmauksien kontekstista oli epäselvyyttä. Reflektointivaiheeseen liittyvät käsitteet on pyritty rakentamaan yleisesti hyväksytyn ongelmanratkaisun teoriakirjallisuuden pohjalta. Jotta lukija pystyisi paremmin varmistumaan havaintojen luotettavuudesta, tulososiossa esitellään opettajien suoria sitaatteja. Koska aineisto oli valmiiksi kerätty, enkä ollut koskaan tavannut opettajia, minulle ei ollut myöskään muodostunut heistä ennakko-oletuksia. On kuitenkin muistettava, että tutkija ei voi koskaan täysin saavuttaa objektiivista näkökulmaa pyrkiessään ymmärtämään tutkittavaa ilmiötä, sillä arvopohjamme muokkaa sitä, miten ilmiön näemme ja ymmärrämme (Hirsjärvi, Remes & Sajavaara 2009, 161). Videomateriaalin tulkinnassa tulee huomioida tutkijan subjektiivinen näkökulma, etenkin kun analyysin tekee vain yksi henkilö (Knoblauch & Schnettler 2012, 353).

Tutkimuksen **siirrettävyys** toiseen kontekstiin riippuu siitä, miten samankaltaisia tutkittu ympäristö ja sovellusympäristö ovat (Tuomi & Sarajärvi, 2003, 136). Tynjälän (1991) mukaan laadullisen tutkimuksen luotettavuutta lisää huolellinen kuvaus tutkimuksen etenemisestä ja analyysin kulusta, jolloin toinen tutkija voisi tehdä samat tulkinnat aineistosta. Toisaalta on kuitenkin huomioitava, että on käytännössä mahdotonta päästä täydelliseen tulkinnan toistettavuuteen, koska tutkijan tulkinta on kuitenkin yksilöllistä (Eskola & Suoranta 1996). Olen pyrkinyt esittelemään yleisesti reflektointivaiheeseen liittyvän ohjauksen niin, että samaa analyysitapaa voitaisiin käyttää myös muissa ongelmatehtävien reflektointivaiheen tarkasteluissa. On myös huomioitava, että voidaan olettaa tässä tutkimuksessa olevien opettajien olevan erityisen motivoituneita ongelmanratkaisun opettamiseen. Tutkimukseen osallistuneet opettajat ovat osallistuneet vapaaehtoisina kolmen vuoden ajan ongelmanratkaisuun liittyneeseen tutkimusprojektiin. He ovat opettaneet luokalleen 16 ongelmanratkaisutehtävää ennen tässä tutkimuksessa käytettyä ongelmatehtävää. Myös oppilaat ovat saaneet siis kokemuksia ongelmatehtävistä, mikä tulee huomioida tuloksia tarkastellessa.

Tutkimuksen **riippuvuuteen ja varmuuteen** vaikuttaa sekä tutkijasta itsestään että tutkittavasta ilmiöstä johtuvat tekijät (Tuomi & Sarajärvi 2003, 136). Koska analysointi on tehty pelkästään videoiden ja niistä tehtyjen litterointien perusteella, tulee muistaa, että videoinnilla ei voida tallentaa kaikkia luokan tapahtumia, vaan osa oppilaista ja luokan tapahtumista saattaa rajautua kuvan ulkopuolelle. Yksi videoinnin haasteista onkin tapahtumien dokumentointi järkevästi, niin että luokan tapahtumat eivät jää videokuvan ulkopuolelle (Mondada 2012, 306). Kaikki oppilaiden äänet eivät myöskään erotu videoilla selkeästi ja esimerkiksi tilanteet, jossa opettaja näyttää oppilaan paperista jotain niin, että kameran kuva ei tavoita tapahtumaa, jäävät tutkijan tulkinnan varaan.

Varmistuakseni tehtävän **vahvistettavuudesta**, olen pyrkinyt esittämään analyysinvaiheet ja tulokset mahdollisimman tarkasti, jotta lukija voi tehdä arvioita tutkijan päätelmistä. Kootessani teoriaosuutta tutustuin useampiin ongelmanratkaisuprosessien malleihin, joista valitsin tutkielmani kannalta olennaisimmat mallit. Olen pyrkinyt tuomaan teoriassa esille mahdollisimman selkeästi, miten olen päätynyt sisällönanalyysissä käyttämiini pääluokkiin.

8 Pohdintaa

Ongelmanratkaisun opettamista voidaan lähestyä koulumatematiikassa Schroederin ja Lesterin (1989, 32–33) mukaan kolmesta eri näkökulmasta: voidaan opettaa ongelmanratkaisua, ongelmanratkaisua varten sekä ongelmanratkaisun kautta. Näkökulmat eivät ole kuitenkaan toisistaan irrallisia vaan ne ovat toisiinsa ja muuhun matemaattiseen sisältöön kytkeytyneitä (Lesh & Zawojewski 2007, 765). Opettajan tulisikin ongelmaa valitessaan pohtia, mitä haluaa ongelmanratkaisulla saavuttaa – ongelmia ei tule opettaa vain toisistaan irrallisina pähkinöinä, vaan opettajan tulisi nähdä ongelmat osana laajempaa matemaattista kokonaisuutta sekä niiden rooli opetuksen välineenä (Karp 2009, 130; Chapman 2013, 1–2). Ongelmanratkaisutunnin suunnittelussa ja oppilaiden ohjauksessa tulee myös huomioida oppilaiden tiedolliset ja taidolliset valmiudet, ongelmanratkaisuprosessiin ja työskentelyyn vaikuttavat uskomukset ja asenteet sekä ohjata aktivoivasti oppilaan ongelmanratkaisuprosessin etenemistä (Chapman 2013, 1–2; Hähkiöniemi ym. 2012).

Tässä tutkimuksessa keskiöön nousi opettajan ohjaus ongelmanratkaisuprosessin reflektointivaiheessa. Koska oppilaat eivät välttämättä osaa itse orientoitua reflektointivaiheeseen, vaan ajattelevat ongelmanratkaisun olevan ohi varsinaisen ratkaisun löydyttyä, tulisi opettajan kiinnittää huomiota tehtävän ja sen ratkaisun jälkityöstöön (Mason 1985, Hähkiöniemi ym. 2012). Opettajan tulisi ohjata oppilasta tutkimaan ratkaisua ja ongelmaa eri näkökulmista riippuen ongelmanratkaisutunnin tavoitteista ja esimerkiksi yhteisen luokkakeskustelun aikana hioa ja koota oppilaiden ajatuksia ja ratkaisuja niin, että työskentelyn aikana löydetyt ratkaisut kytkeytyvät toisiinsa sekä laajempaan matemaattiseen kontekstiin (Shimizu 1999, 110–111).

Tutkimukseen valitut opettajat saivat itse päättää näkökulman labyrintti–tehtävän käsittelyyn. Annan ja Ilonan oppitunneilla oppilaat pyrkivät tekemään havaintoja ja yleistyksiä ja muodostamaan säännön labyrinttien ratkaistavuudelle sekä erikokoisten labyrinttien ratkaisuvaihtoehtojen määrälle.

Anna ohjasi oppilaitaan myös yleistämään löydettyä sääntöä uusiin ongelmatilanteisiin. Ilonan oppilaat tekivät monia oikeita havaintoja säännönmukaisuuksista, mutta Ilonan oppitunnilla ei systemaattisesti koottu yhteen oppilaiden tekemiä havaintoja.

Anna ja Ilona ohjasivat oppilaitaan ajatukseen, että osaan tehtäväpaperin labyrinteista ei välttämättä ollut ratkaisua ja oppilaiden tehtäväksi jäikin tällaisten labyrinttien löytäminen sekä niiden ominaisuuksien tutkiminen säännön löytämiseksi. Eeva ei tuonut tätä ilmi oppilailleen, eivätkä hänen oppilaat saaneetkaan tehtyä päätelmää ongelmanratkaisun aikana mahdottomista labyrinteista. Oppilaat jumiutuivat etsimään mahdottomiin labyrintteihin ratkaisuja, eivätkä saaneet itsenäisesti ilman opettajan ohjausta muodostettua hypoteesia sille, miksi osaan labyrinteista oli vaikeaa löytää ratkaisureittejä.

Annan ja Eevan oppilaat näyttivät yhteisesti erilaisia ratkaisuja labyrintteihin ja Anna pyrki saamaan oppilaitaan selittämään ratkaisustrategioitaan. Labyrinttitehtävässä näytti siltä, että ratkaisut löydettiin pääosin kokeilemalla, tosin muutamat Annan oppilaista sovelsivat aiemmin löydettyä tekniikkaa muihinkin labyrintteihin, mikä tuotiin myös ilmi yhteisesti. Eevan tunnilla ratkaisut käytiin yhdessä läpi vain nopeasti, niin että ”oikeat vastaukset” näytettiin niille oppilaille, jotka eivät yrityksistä huolimatta olleet löytäneet ratkaisuja kaikkiin labyrintteihin.
Osa yhdessä oikeaksi kuitatuista ratkaisuista oli kuitenkin virheellisiä, eikä niitä tutkittu tarkemmin.

Sekä Anna että Ilona ohjasivat oppilaitaan muodostamaan hypoteesin ja testaamaan sitä. Oppitunneilla näytti olevan selkeä tavoite, jota kohti työskentelyä ohjattiin. Molemmilla luokilla oppilaat näyttivätkin selvittävän säännönmukaisuuden labyrinttien ratkaistavuudelle, vaikka yksityiskohtainen matemaattinen säännön muotoilu ja testaus jäi tunneilla puutteelliseksi. Sen sijaan Eevan tunnilla ongelman parissa työskentely ei edennyt labyrinttien ratkaisujen etsimistä pidemmälle. Näyttikin siltä, että Eeva ei ollut täysin ymmärtänyt labyrinttitehtävän matemaattista ajatusta, jotta olisi voinut ohjata oppilaitaan havaitsemaan mahdottomien labyrinttien olemassaolon. Ilonakin puhuu tunnin loputtua ongelmanratkaisun opettamisen vaikeudesta:

> ”Mut se mitä mä oikeesti kaipaan sen tehtävän osalta on se et miten mikään liittyy mihinkään, että maailma on pullollaan… Ongelmanratkaisukirjoissa on tosi kivoja ongelmia. mutta mikä merkitys tosi kivalla ongelmalla on, ni se meidän pitäisi keksiä itse, ja meil ei oikein riitä energia siihen. Kun aikaa kuluu aika paljon, ni se on se haaste.” (Ilona)

Kaikki kolme opettajaa ovat olleet mukana tutkimusprojektissa sen alusta lähtien, yhteensä kolme vuotta. He ovat saaneet opetettavakseen kuukausittaisia tehtäviä, joista labyrintti oli järjestyksessä 17. opetettu tehtävä. Ilonan pohdinta kiteyttääkin hyvin ongelmanratkaisun opettamisen haasteet: pelkkä hyvän ongelman valinta ei riitä – tulee ymmärtää sekä yhden ongelman ja yhden oppitunnin merkitys ja tavoitteet että ongelmanratkaisuun liittyvä laajempi matemaattinen kokonaisuus. Opettajille voisikin olla hyödyllistä pohtia ongelmanratkaisua reflektointivaiheen kautta: mikä ongelmassa ja sen ratkaisussa on sellaista, mitä voitaisiin yhdessä tiivistää oppitunnin päätteeksi. Näin ongelmanratkaisuun keskittyvää oppituntia voitaisiin suunnitella tavoitteista käsin.

Tutkielmani tavoitteena oli tarkastella kolmen suomalaisen viidennen luokan luokanopettajan ongelmanratkaisutunnin reflektointivaiheen ohjausta. Teoriaosuudessa pyrin rakentamaan kuvan reflektointivaiheesta ja siihen liittyvästä ohjauksesta, jonka perusteella analysoin opettajien toimintaa. Opettajat olivat itse päättäneet näkökulmat, joista lähestyivät tutkimuksessa käytettyä labyrintti–ongelmaa ja myös heidän reflektointivaiheiden ohjaus riippui tunnilla otetusta näkökulmasta. Näytti siltä, että käsitys tunnin tavoitteesta auttoi opettajaa ohjaamaan oppilaiden toimintaa kohti tiettyä päämäärää ja ratkaisujen ja havaintojen kokoaminen oli johdonmukaisempaa. Sen sijaan jos ongelman alkuehdot tai ongelmanratkaisun tarkoitus olivat jääneet opettajalle epäselviksi, eivät oppilaatkaan pystyneet etenemään päätelmissään kohti luovia ratkaisuja. Stehlikovankin (2006, 23) havainnot ongelmanratkaisunopetuksesta pätevät tässä tutkimuksessa: avoimien ongelmien käyttö opetuksessa ei yksin takaa, että itse opetus ja ohjaus olisi luovaa ja oppilaiden ajattelua aktivoivaa ja syventävää.

Mielenkiintoisia jatkotutkimusaiheita olisi tutkia opettajien käsityksiä ongelmanratkaisun opettamisesta ja sen merkityksestä oppilaiden matemaattisen ajattelun ja ymmärtämisen kehittymisessä. Tutkimusprojektissa mukana olleet opettajat ovat lisäksi opettaneet erilaisia ongelmatehtäviä luokilleen usean vuoden ajan ja voisi olla myös mielenkiintoista tutkia miten ongelmanratkaisun ohjaus on muuttunut tutkimusprojektin edetessä.

9 Lähteet

Ahtee, M., Pehkonen, E., Krzywacki, H., Lavonen, J. & Jauhiainen, J. (2005). Kommunikointi luokassa – opetuksen ydin? Teoksessa Virta, A., Merenluoto, K. & Pöyhönen, P. (toim.). *Ainedidaktiikan ja oppimistutkimuksen haasteet opettajankoulutukselle*. Turun yliopisto. Kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisuja B 75.

Boud, D., Keogh, R. & Walker, D. (1985). *Reflection. Turning experience into learning*. London: Kogan Page.

Chapman, O. (2013). Mathematical-task knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16, 1–6.

Dewey, J. (1910). *How We Think*. Boston: D.C. Heath & Co., Publishers.

Gagné, R. M. (1970). *The Conditions of Learning.* 2nd edition, New York: Holt, Rinehart & Winston

Eskola, J. & Suoranta, J. (1996). *Johdatus laadulliseen tutkimukseen.* Rovaniemi: Lapin yliopisto.

Haapasalo, L. (1998*). Oppiminen, Tieto & Ongelmanratkaisu*. Joensuu: Medusa Software.

Haapasalo, L., Zimmermann, B. & Eronen L. (2007). Fostering Problem-Solving Abilities by Modern Technologies in Self-Determined Learning Environments. Teoksessa Tünde, B. (Toim.) *Problem Solving in Mathematics Education*. Komarno, Slovakia:Pont Institution and Wolfgang Kempelen Association of Young Researchers and PhD Candidates in Slovakia (55–78).

Hirsjärvi, S., Remes, P. & Sajavaara, P. (2009). *Tutki ja kirjoita* (15. uudistettu painos). Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Tammi.

Hähkiöniemi, M., Leppäaho, H., & Francisco, J. (2012). Model for teacher assisted technology enriched open problem solving. Teoksessa Bergqvist, T. (Toim.), *Learning Problem Solving and Learning Through Problem Solving, proceedings from the 13th ProMath conference* (30–43). Umeå: Umeå university, Faculty of Sciences and Technology, Umeå Mathematics Education Research Centre, UMERC.

Karp, A. (2009). Analyzing and attempting to overcome prospective teachers' difficulties during problem-solving instruction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13, 121–140.

Knoblauch, H. & Schnettler, B. (2012). *Videography: analysing video data as a 'focused' ethnographic and hermeneutical exercise* (334–356). *Qualitative Research June 2012 vol 12 no. 3.*

Koponen, M. (2013). *"Eiks tää ois helpoin tapa ratkaista?" Ongelmanratkaisutehtävän purku 3. luokan oppitunnilla.* Helsingin yliopisto: kasvatustieteen kandidaatintutkielma.

LeBlanc. J. F. (1977). *You Can Teach Problem Solving*. Arithmetic Teacher 25, no. 2, *16–20*.

Leiwo, M., Kuusinen, J., Nykänen, P. & Pöyhönen, M-R. (1987). *Kielellinen vuorovaikutus opetuksessa ja oppimisessa II: Peruskoulun luokkakeskustelun määrällisiä ja laadullisia piirteitä*. Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisusarja A.

Lesh, R. & Zawojewksi, J. (2007). Problem Solving and Modeling. Teoksessa Lester, F, K. (toim.), *Second Handbook of Research of Mathematics Teaching and Learning vol. 2* (763–804). National Council of Teachers of Mathematics.

Lester, F. K., & Kehle, P. E. (2003). From problem-solving to modeling: The evolution of thinking about research on complex mathematical activity. Teoksessa Lesh, R. & Doerr, H. (Toim.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (501–518). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Leppäaho, H. (2006). One way to teach mathematical problem solving. Teoksessa Tunde, B. (toim.). *ProMath 2006. Problem Solving in Mathematics Education* (95–107). Wolfgang Kempelen Association of Young Researchers and PhD. Candidates in Slovakia.

Leppäaho, H. (2007). *Matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opettaminen peruskoulussa – Ongelmanratkaisukurssin kehittäminen ja arviointi*. Väitöskirja. Jyväskylän yliopisto. Jyväskylä studies in education, psychology and social research, 298.

Leung, S. (1997). On the Open-ended Nature in Mathematical Problem Posing. Teoksessa Pehkonen, E. (toim.), *Use of open-ended problems in* *mathematics classroom* (7–11). Research report 176. Helsinki: Helsingin yliopisto.

Luff, P. & Heath, C. (2012). Some ‘technical challenges’ of video analysis: social actions, objects, material realities and the problems of perspective. *Qualitative Research,* 2012 vol. 12 (3), 255–*289.*

Mason J., Burton L. & Stacey K. (1985). *Thinking Mathematically*. Addison-Wesley Publishers Limited

Mondada, L. (2012). Video analysis and the temporality of inscriptions within social interaction: the case of architects at work. *Qualitative Research*, 12 no. 3, *304–333.*

Näveri, L., Ahtee, M., Laine, A., Pehkonen, E. & Hannula, M. (2012). Erilaisia tapoja johdatella ongelmanratkaisutehtävään – esimerkkinä aritmogon-tehtävän ratkaiseminen alakoulun kolmannella luokalla. Teoksessa Krzywacki, H., Juuti, K. & Lampiselkä, J. (toim.). *Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen ajankohtaista tutkimusta.* Ainedidaktisia tutkimuksia : Suomen ainedidaktisen tutkimusseuran julkaisuja no. 2.

Pehkonen, E. (1997). Introduction to the concept “open-ended problem”. Teoksessa Pehkonen, E. (toim.), *Use of open-ended problems in mathematics classroom* (7–11). Research report 176. Helsinki: Helsingin yliopisto.

Pehkonen, E. (2001). How Do We Understand Problem and Related Concepts? Teoksessa Pehkonen, E. (toim.), *Problem Solving Around the World. Proceedings of the Topic Study Group 11 (Problem Solving in mathematics Education) at the ICME-9 meeting August 2000 in Japan*. Turku: Turun yliopisto.

Pehkonen, E. (2006). The Paper-Cutting Problem Revisited: Some Finnish Experiences. Teoksessa Tunde, B. (toim.). *ProMath 2006. Problem Solving in Mathematics Education* (125–132). Wolfgang Kempelen Association of Young Researchers and PhD. Candidates in Slovakia.

Pehkonen, E., Hannula, M. & Björkqvist, O. (2007). Problem solving as a teaching method in mathematics education. Teoksessa Pehkonen, E., Ahtee, M. & Lavonen, J. (toim.), *How Finns Learn Mathematics and Science* (121–129). Rotterdam: Sense Publishers.

Perkkilä, P. & Lehtelä, P. (2007). Learning environments in mathematics and science. Teoksessa Pehkonen, E., Ahtee, M. & Lavonen, J. (toim.), *How Finns Learn Mathematics and Science* (69–84). Rotterdam: Sense Publishers.

Pólya, G. (1945). *How To Solve It*. *A new aspect of mathematical method.* New Jersey: Princeton University Press.

Pólya, G. (1962). *Mathematical discovery: on understanding, learning, and teaching problem solving. Volume 1*. New York: Wiley, cop.

POPS (2004). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004*. Helsinki: Opetushallitus.

Ryve, A. (2007). What is actually discussed in problem-solving courses for prospective teachers? *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10, 43–61.

Seale, C., Gobo, G., Jaber F. Gubrium & Silverman, D. (2004). *Qualitative Research Practice.* SAGE Publications Ltd.

Shimizu, Y. (1999). Teacher Education Around the World – Aspects of Mathematics Teacher Education in Japan: Focusing on Teachers' Roles. *Journal of Mathematics Teacher Education*. 2, 107–116.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. School of Education, Department of Mathematics, University of California Berkeley: Academic Press, Inc.

Schoenfeld, A. H. (1989). Explorations of Students' Mathematical Beliefs and Behavior. Teoksessa Schoenfeld, A. H. (toim.). *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 20 (4). 338–355.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. Teoksessa Grouws, D. (Toim.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (334–370). New York: MacMillan.

Schroeder, T. L & Lester, F. K. (1989). Developing Understanding in Mathematics via Problem solving. Teoksessa Trafton, P. R. & Shulte, A. P. (toim.), *New Directions for Elementary School Mathematics*. NCTM Yearbook 1989.

Singer, F. M. & Voica C. (2012). A problem-solving conceptual framework and its implications in designing problem-posing tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 83, 9–26.

Stehliková, N. (2006). Constructivist approaches to the teaching of mathematics open ways to creative education (if used properly!). Teoksessa *Department of mathematics report series, vol 14* (14–23). University of South Bohempia Ceské Budejovice. Pedagogical faculty.

Tuomi, J. & Sarajärvi, A. (2003). *Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi*. Helsinki: Tammi

Tynjälä, P. (1991). *Kvalitatiivisen tutkimuksen luotettavuudesta.* Kasvatus 22 (5-6).

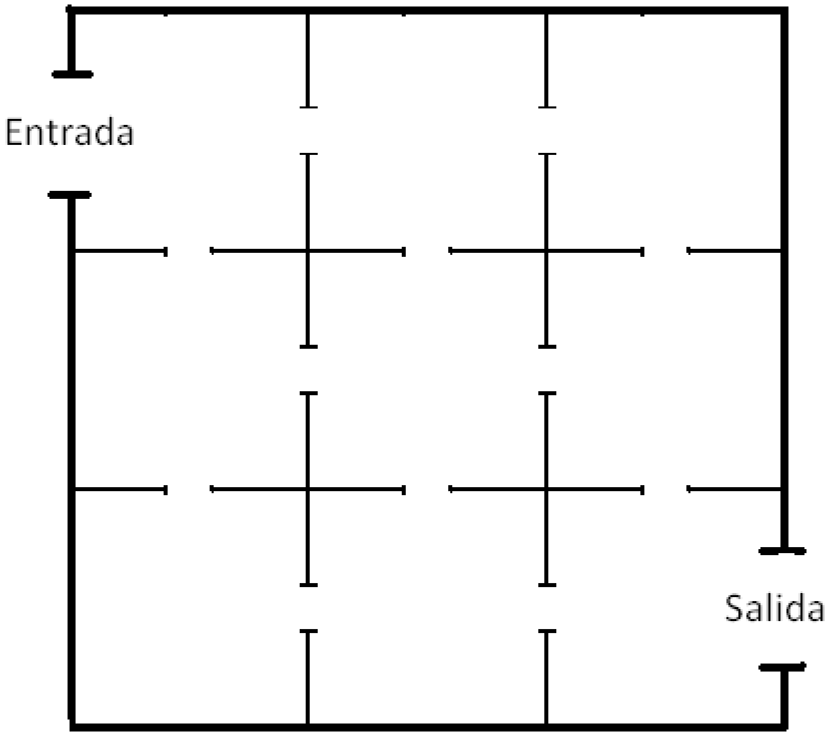
10 Liitteet

Liite 1. Labyrinttitehtäväpaperi

LIITE 1

Tammikuun 2013 tehtävä: **Labyrintti**

a) Seuraavassa labyrintissa on 9 huonetta. Lähtö (Entrada), maali (Salida) ja ovet huoneesta toiseen on merkitty kuvioon. Sinun tarvitsee lähteä lähtöaukosta, käydä joka huoneessa täsmälleen kerran ja poistua maalin kautta. Piirrä kaikki mahdolliset tavat tehdä tämä.



b) Seuraavalla sivulla on 5 labyrinttia (4x4, 5x5, 6x6, 7x7, 8x8). Etsi jokaisessa ainakin yksi reitti lähdöstä maaliin käymällä kerran jokaisessa huoneessa.

c) Minkä kokoiselle neliölabyrintille on mahdollista löytää reitti lähdöstä maaliin käymällä vain kerran jokaisessa huoneessa? Mitä havaitset? Vihje: väritä huoneet mustavalkoisiksi, kuten shakkilaudalla.

d) Entä miten tapahtuu suorakulmion muotoisella labyrintilla?