Kanala

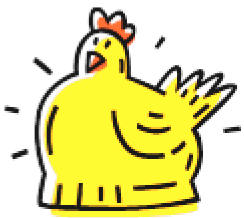
Avainsanat: pinta-ala, piiri, tasogeometria

Luokkataso: 3.-5. luokka, 6.-9. luokka, lukio

Välineet: kartonkisuikaleita, sakset, teippiä, helmiä tai herneitä

Kuvaus: Tehtävässä pohditaan piirin ja pinta-alan suhdetta yrittämällä rakentaa rajatusta määrästä aitaa kanala mahdollisimman monelle kanalle.

Tehtävänanto



Olet aloitteleva kanafarmari, joka haluaa rakentaa mahdollisimman suuren kanalan. Aitamateriaalia on saatavissa vain rajattu määrä, joten haluat kokeilla, minkä muotoiseen kanalaan mahtuu eniten kanoja. Käytä aitamateriaalina kartonkisuikaleita ja kanoina helmiä tai herneitä. Jokaisen ryhmäläinen saa yhtä pitkän kartonkisuikaleen (n. 18–28 cm), joista jokaisen tulee rakentaa erimuotoinen kanala. Huomaa, että kanat voivat olla vieri vieressä mutta eivät päällekkäin. Kenen kanalaan mahtuu eniten kanoja?

Tutkitaan seuraavaksi aitaukseen mahtuvien kanojen lukumäärää, kun käytössä on kaksi edellisessä kohdassa käytetyn pituista kartonkisuikaletta. Mitä siis tapahtuu kuvion pinta-alalle, kun piiri kaksinkertaistuu? Tutki laittamalla kaksi kartonkisuikaletta peräkkäin. Pidä huolta siitä, että rakentamasi aitaukset ovat yhdenmuotoisia!

Vinkki: Tehtävää voi jatkaa osoittamalla edellisessä kohdassa tehty havainto mielivaltaiselle kuviolle.

Erilaisia kanaloita. Kuva Summamutikka-keskus.

Vastaukset

Eniten kanoja mahtuu ympyränmuotoiseen rakennelmaan. Mitä lähempänä muoto on ympyrää, ts. mitä enemmän siinä on kulmia, sitä suurempi on muodon rajaaman alueen pinta-ala. Neliön pinta-ala on siis pienempi kuin ympyrän, mutta suurempi kuin kolmion. Yllä olevan kuvan esimerkkikuvioiden piiri on 18 cm. Näiden kuvioiden pinta-alat ja helmien määrät ovat:

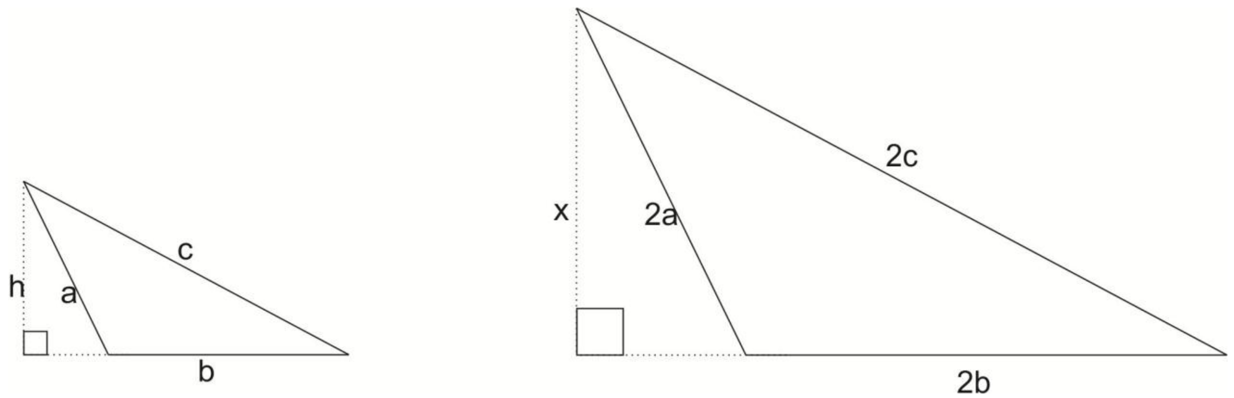
Kolmio: $A = 14{,}4\ cm^2$ ja helmiä 16

Neliö: $A = 20{,}25\ cm^2$ ja helmiä 23

Ympyrä: $A = 28{,}26\ cm^2$ ja helmiä 28

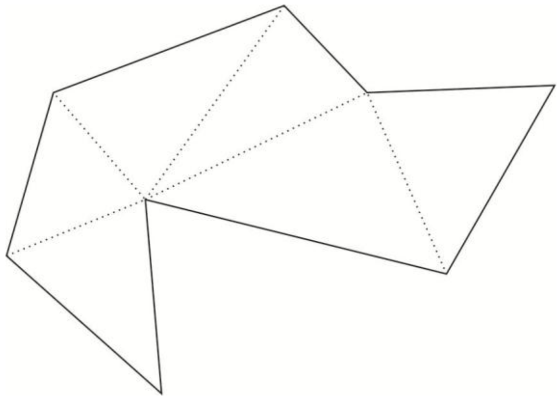
Lisäksi vaikuttaa siltä, että kuvion pinta-ala nelinkertaistuu, kun piiri kaksinkertaistuu. Havainnon voi perustella yhdenmuotoisuuden avulla. Tarkastellaan aluksi mielivaltaista kolmiota, jonka sivujen pituudet ovat *a*, *b* ja *c* (ks. kuva). Merkitään korkeutta kirjaimella *h*. Kolmion ala on siis $A_1 = \frac{b \cdot h}{2}$.

Yhdenmuotoisen kolmion, jonka piiri on kaksi kertaa alkuperäisen kolmion piiri, sivujen pituudet ovat siis $2a$, $2b$ ja $2c$. Mutta onko kolmion korkeus $2h$? Kyllä on, sillä yhdenmuotoisten kuvioiden vastinosien suhteelle pätee $\frac{a}{2a} = \frac{h}{x}$, josta saadaan $x = 2h$.



Näin ollen isomman kolmion pinta-ala on $A_2 = \frac{2b \cdot 2h}{2} = 4\frac{b \cdot h}{2} = 4 \cdot A_1$.

Entäpä sitten mielivaltaiset monikulmiot? Tiedetään, että minkä tahansa monikulmion ala voidaan laskea jakamalla monikulmio kolmioihin ja summaamalla kolmioiden alat yhteen (ks. kuva alla).



Tarkastellaan sitten em. monikulmion kanssa yhdenmuotoista monikulmiota, jonka piiri on kaksinkertainen. Tämä monikulmio voidaan jakaa vastaavalla tavalla kolmioihin, ja monikulmioiden kolmiot ovat pareittain yhdenmuotoisia. Kolmioiden yhdenmuotoisuudesta seuraa, että kun kolmion yhden sivun pituus kaksinkertaistuu, myös muiden sivujen pituudet (ja korkeus) kaksinkertaistuvat. Siispä kolmion ala nelinkertaistuu. Näin ollen mielivaltaisen monikulmionkin ala nelinkertaistuu.

Tarkastellaan sitten vielä ympyrää. Ympyrän säde voidaan määrittää kehän pituuden avulla, jolloin säde $r_1 = \frac{d}{2\pi}$. Näin ollen kun halkaisija kaksinkertaistuu, sädekin kaksinkertaistuu. Koska pinta-alaa laskettaessa säde korotetaan toiseen potenssiin, säteen kaksinkertaistuessa pinta-ala nelinkertaistuu.