Maapallon ympärysmitta

<u>Avainsanat:</u> ympyrä, arvioiminen, mittaaminen, verranto, trigonometria, samankohtaiset kulmat, ympyrän kehä, inversio-ongelmat

<u>Luokkataso:</u> 6.-9. luokka, lukio

<u>Välineet:</u> mitta, keppi/tikkuja, teippiä, tussi, taskulamppu, narua, pallo (esim. styroksipallo, koripallo, jumppapallo)

<u>Kuvaus:</u> Selvitä maapallon ympärysmitta kaksisataa vuotta ennen ajanlaskua eläneen Eratosthenes Kyreneläisen oppien mukaan. Mittausmenetelmää testataan sekä pienoismallin että oikean maapallon avulla.

Aluksi

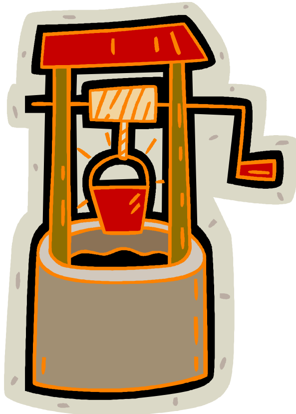
Eräänä aurinkoisena päivänä pari sataa vuotta ennen ajanlaskun alkua antiikin Kreikassa kohistiin. Monitieteilijänä tunnetun Eratosthenes Kyreneläisen (276–194 eaa.) väitettiin selvittäneen maapallomme ympärysmitan. Eratosthenes laski maapallon ympärysmitaksi 39 250 km, mikä on hyvin lähellä nykyajan mittauslaitteiden avulla saatua tulosta 40 075 km. Itse asiassa Eratostheneen saama tulos eroaa oikeasta arvosta vain kaksi prosenttia, mikä on aikamoinen suoritus sen aikaisilla välineillä!

Miten Eratosthenes sitten teki sen? Eratosthenes tiesi, että kesäpäivänseisauksen aikaan aurinko paistoi aivan kohtisuorassa Etelä-Egyptin Syenen kaupungissa sijaitsevan kaivon yläpuolella. Hän laittoi kepin maahan Syenen pohjoispuolella, samalla pituuspiirillä sijaitsevassa Aleksandrian kaupungissa. Samaan aikaan kun auringonsäteet osuivat kaivoon Syenessä, Aleksandriassa mitattiin kepin muodostaman varjon pituus. Näiden mittausten avulla auringon korkeuskulmaksi laskettiin 7,2°, joka on sama kuin Syenestä ja Aleksandriasta maapallon keskipisteeseen piirrettyjen säteiden välinen kulma.

Antiikin Kreikassa pituusmittana käytettiin *stadionia*. Stadionin pituus vaihteli paikasta ja ajasta riippuen, mutta on kuitenkin epäilty, että Egyptissä asunut Eratosthenes olisi käyttänyt egyptiläistä stadionia, joka vastaa 157 metriä. Syenen ja Aleksandrian kaupunkien välimatkaksi oli mitattu 5 000 stadionia, mikä tekee nykyisessä mittajärjestelmässämme

$$5000 \cdot 157\ m = 785\ 000\ m = 785\ km.$$

Kuva 1. Eratosthenes.
Lenny Flank / Flickr.com
(Creative Commons)



Saatujen tietojen perusteella voitiin muodostaa verranto

$$\frac{7{,}2°}{360°} = \frac{785\ km}{maapallon\ ympärysmitta}.$$

Näin ollen maapallon ympärysmitaksi saatiin

$$maapallon\ ympärysmitta = \frac{360°}{7{,}2°} \cdot 785\ km = 39250\ km.$$

Toteutusehdotus

Nyt on sinun vuorosi testata Eratostheneen mittausmenetelmää! Tutkimus koostuu kahdesta osasta. Ensin mittaustilannetta tarkastellaan pienoismallin avulla, minkä jälkeen lähdetään ulos tekemään tutkimusta oikealla maapallolla. Tutkimuksesta voi toki toteuttaa vain toisen osan, jos tilanne niin vaatii.

Osa 1 – tilanteen mallinnus

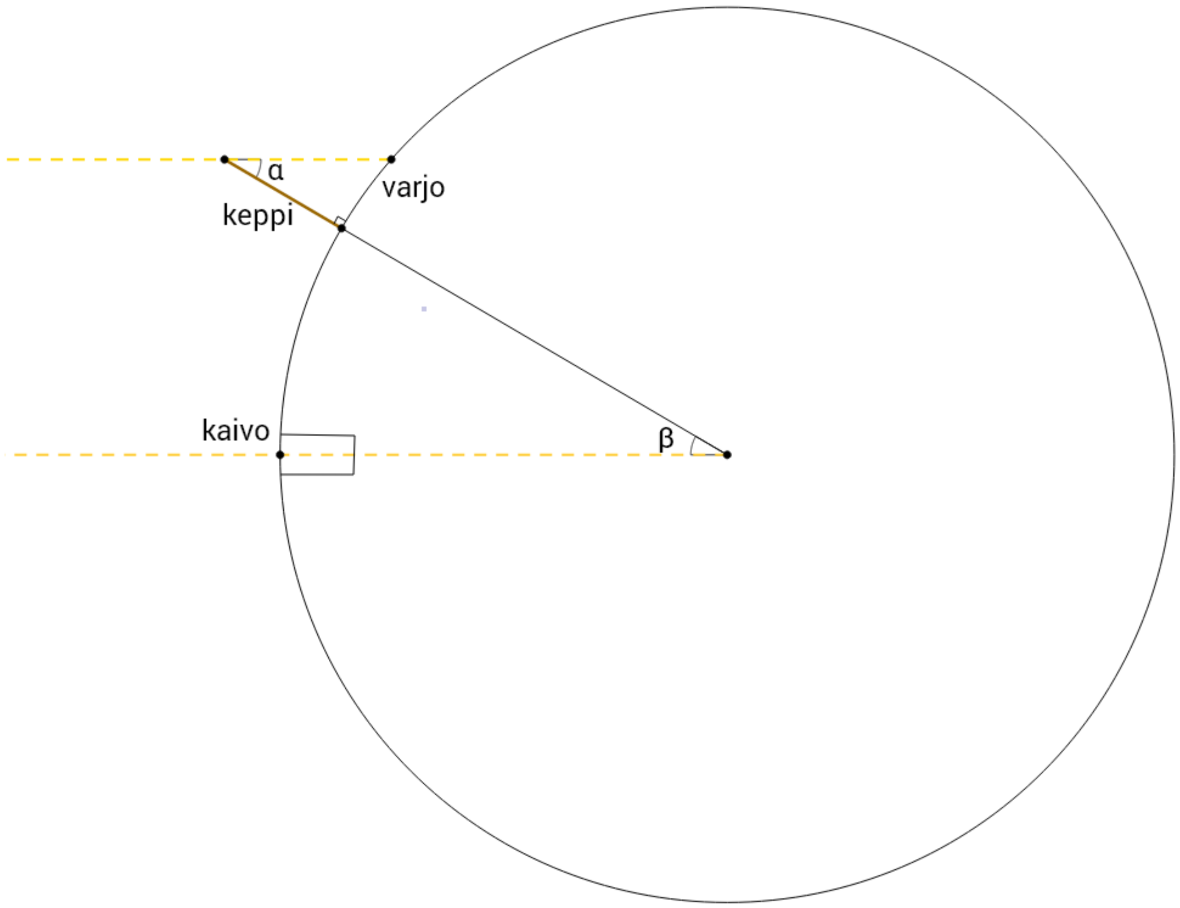
1. Aloita Eratostheneen mittauskeinon testaaminen valmistamalla pienoismalli mittaustilanteesta. Välineiksi tarvitset pallon, kaksi hammastikkua, tussin, teippiä sekä taskulampun. Teippaa hammastikut kohtisuorassa palloon sopivalle etäisyydelle toisistaan. Tikkujen pitää olla sen verran lähellä toisiaan, että osoitettaessa kaivoa mallintavaa tikkua taskulampulla, keppiä esittävästä tikusta muodostuu vielä varjo. Merkitse tussilla, kumpi tikuista mallintaa kaivoa ja kumpi keppiä.

2. Nyt kaikki on valmista mittaukseen! Osoita taskulampun valolla kohtisuoraan kaivoon niin kaukaa kuin lampun valoteho vielä riittää. Valo osuu kaivoa mallintavaan tikkuun kohtisuorassa, kun tikusta ei muodostu varjoa. Mittaa keppiä esittävästä tikusta muodostuvan varjon pituus. Mittaa myös kepin pituus sekä kaivon ja kepin välinen etäisyys esimerkiksi lankaa apuna käyttäen.

3. Seuraavaksi lasketaan auringon korkeuskulma α hyödyntäen saamiamme mittauksia. Keppi on kohtisuorassa maata vasten, joten muodostuu suorakulmainen kolmio, jossa toisena kateettina on keppi ja toisena sen varjo. (Kuva 2) Lasketaan kepin ja kolmion hypotenuusan välinen kulma α tangentin avulla:

$$\tan\alpha = \frac{varjon\ pituus}{kepin\ pituus}.$$

Huom. Vaikka pallon pinta onkin kaareva, voidaan kuitenkin ajatella, että kepin ja sen varjon avulla muodostuu suorakulmainen kolmio, sillä muodostuvan varjon pituus on hyvin pieni pallon ympärysmittaan suhteutettuna.



Kuva 2. Keppi ja sen varjo muodostavat suorakulmaisen kolmion.

4. Kulman α avulla saadaan laskettua myös kaivosta ja kepistä pallon keskipisteeseen piirrettyjen säteiden välinen kulma β. Kulma α on sama kuin kulma β, sillä ne ovat samankohtaiset kulmat.

5. Saatujen tietojen perusteella voidaan muodostaa verranto:

$$\frac{\beta}{360°} = \frac{kaivon\ ja\ kepin\ välinen\ matka}{pallon\ ympärysmitta}.$$

   Tästä saadaan pallon ympärysmitaksi

$$pallon\ ymäpärysmitta = \frac{360°}{\beta} \cdot kaivon\ ja\ kepin\ välinen\ matka.$$

6. Mittaa lopuksi pallon ympärysmitta käyttäen hyväksesi narua tai lankaa. Vertaa saamaasi tulosta laskelmiisi. Mistä mahdolliset erot voisivat johtua?

Osa 2 – ulos luontoon

1. Lähde ulos mittaamaan maapallomme ympärysmittaa. Tarvitset mukaasi kepin sekä mittanauhan. Iske keppi kohtisuoraan maahan keskipäivän aikaan ja mittaa muodostuvan varjon pituus. Mittaa myös maan yläpuolelle jäävän kepin pituus.

2. Seuraavaksi tarvitsee selvittää, missä päin maailmaa aurinko tällä hetkellä paistaa kohtisuoraan. Aurinko paistaa kohtisuoraan päiväntasaajalle kevät- ja syyspäiväntasauksien aikaan, Kravun kääntöpiirille kesäpäivänseisauksen aikaan ja Kauriin kääntöpiirille talvipäivänseisauksen aikaan. Mikä seisaus- ja tasauspäivistä on ollut viimeksi tutkimusajankohdan näkökulmasta? Alla olevasta taulukosta voi tarkastaa, missä kohtaa Aurinko tutkimushetkellä suunnilleen sijaitsee.

Ajankohta	**Auringon sijainti**	**Leveyspiirit**
Kevätpäiväntasaus	Päiväntasaaja	$0°$
Kesäpäivänseisaus	Kravun kääntöpiiri	$23{,}4°$ pohjoista leveyttä
Syyspäiväntasaus	Päiväntasaaja	$0°$
Talvipäivänseisaus	Kauriin kääntöpiiri	$23{,}4°$ eteläistä leveyttä

Tutkimuspaikan etäisyyden paikkaan, jossa aurinko paistaa kohtisuoraan, voi laskea hyödyntäen tietoa, että yksi leveysaste vastaa n. 110 kilometriä. Oletetaan esimerkiksi, että teemme tutkimusta Helsingissä kesäpäivänseisauksen aikaan. Helsinki sijaitsee leveyspiirillä 60° pohjoista leveyttä ja aurinko paistaa tällöin kohtisuorassa Kravun kääntöpiirille, jolloin Helsingin ja kääntöpiirin välinen etäisyys leveysasteina on $60° - 23{,}4° = 36{,}6°$. Kilometreinä tämä tekee $36{,}6° \cdot 110 = 4\,026\ km$.

Vinkki: Tarkemman sijainnin laskemiseen voi käyttää hyväksi tietoa, että Auringolla kestää noin kolme kuukautta siirtyä kääntöpiiriltä päiväntasaajalle ja toisinpäin. Oletetaan esimerkiksi, että tutkimusta tehdään elokuun puolessa välissä. Tällöin kesäpäiväntasauksesta on kulunut aikaa noin kaksi kuukautta, joka on kaksi kolmasosaa ajasta kesäpäiväntasauksen ja syyspäivän seisauksen välillä. Aurinko ei olekaan enää Kravun kääntöpiirillä vaan se onkin kulkenut kaksi kolmasosaa matkasta kohti päiväntasaajaa. Tällöin Aurinko on kulkenut

$$\frac{2}{3} \cdot (23{,}4° - 0°) = \frac{2}{3} \cdot 23{,}4° = \frac{2}{3} \cdot 23{,}4 \cdot 110\ km = 1\,716\ km.$$

Näin ollen Helsingin etäisyys paikkaan, jossa aurinko paistaa kohtisuoraan, on $4\,026\ km + 1\,716\ km = 5\,742\ km$.

3. Tee laskelmat kuten tilanteen mallinnuksen (osa 1) kohdissa 3-5. Kuinka lähelle pääsit todellista mittaa (40 075 km)? Mistä mahdolliset erot voisivat johtua?