Professorin pähkinät

Avainsanat: logiikka, päättely, luvut, yhtälöt, lukuteoria, tasogeometria, avaruusgeometria, kombinatoriikka, vektorit

Luokkataso: 1.-2. luokka, 3.-5. luokka, 6.-9. luokka, lukio

Välineet: -

Kuvaus: Tehtävään on koottu pientä purtavaa vastauksineen matematiikan eri osa-alueilta.

Saatteeksi

Tehtävään on koottu useita eritasoisia pulmapähkinöitä matematiikan eri osa-alueilta, ja niistä monia on käytetty menestyksellä aivan alaluokkalaisten kanssa. Tehtävät on tarkoitettu matematiikan, sen oppimisen ja opettamisen lähtökohdiksi. Jokaisen tehtävän kohdalla kannattaakin miettiä ainakin seuraavia kysymyksiä:

- Miten tehtävä ratkeaa?
- Miten erilaisia oppilaita voi auttaa löytämään ja ymmärtämään ratkaisun?
- Miten tehtävän aihepiiriä voi muunnella?
- Miten tehtävän vaikeustasoa voi muunnella?

Esimerkki (Kombinatorista päättelyä, tehtävä 1)

> *Tessu-koira hakee sukkia pimeässä huoneessa olevasta laatikosta. Sukat ovat sinisiä tai punaisia, mutta muuten täysin samanlaisia. Montako sukkaa Tessun on vähintään otettava voidakseen olla varma siitä, että otetuista sukista riittää jokaiseen tassuun samanvärinen sukka?*

Kysymyksiä pohdittavaksi:

- Kuinka monta sukkaa Tessu tarvitsee?
- Onko kolmas sukka välttämättä samanvärinen kuin ensimmäisen tai toinen sukka?
- Ihannetapauksessa samanväriset sukat löytyvät heti ensimmäisellä yrityksellä. Mutta mikä on huonoin mahdollinen tilanne?
- Miten tehtävä muuttuu, jos sukkia etsii aamu-uninen opettaja? Entä jos sukat on hukassa vaikka kovakuoriaisella tai tuhatjalkaisella?
- Voiko tehtävän ideaa yleistää?
- Miten erilaisten sukkien lukumäärä vaikuttaa tehtävään?

Usein pulmatehtävien matemaattinen sisältö on ennemmin ratkaisuprosessissa kuin itse vastauksessa. Keskeinen kysymys onkin oppijan haastaminen mielekkäältä tuntuvaan ja turvalliseen älylliseen seikkailuun.

Tehtävien jaottelu aihepiireihin on karkea ja moni tehtävä voisi olla useammassakin eri kohdassa.

Logiikkaa

1. Joku on pannut pippuria koiran ruokakuppiin. Tiedetään, että tekoon on syyllistynyt Kelju tai Kalju – tai molemmat yhdessä. Seudulla syylliset valehtelevat ja syyttömät puhuvat totta. Kelju tunnustaa: “Me olemme molemmat syyllisiä.” Ketkä ovat syyllisiä?

2. Tiedetään kaksi asiaa Allin sekavasta tunne-elämästä: Alli rakastaa Timoa tai Alli rakastaa Mattia. Jos Alli rakastaa Timoa, niin hän rakastaa Mattia. Ketä Alli rakastaa? Entä jos tiedämme, että hän rakastaa vain yhtä?

3. Alli turvautuu selvänäkijän apuun setviessään tunne-elämänsä koukeroita. Hän sanoo: “Minulle on kerrottu, että jos Jaakko rakastaa minua, niin Kari rakastaa minua. Voinko luottaa tähän tietoon?” Selvänäkijä vastaa: “Jos Kari rakastaa sinua, niin saamasi tieto pitää paikkansa.” Mitä Alli voi päätellä?

4. Ulla Uljas on matkalla kelmien ja ritarien maassa. Kelmit ja ritarit ovat aivan samannäköisiä, mutta kelmit valehtelevat aina ja ritarit puhuvat aina totta. Molemmat ovat lyhytsanaisia ja vastaavat vain yhteen kysymykseen – siihenkin vain “kyllä” tai “ei”. Ulla on tullut kahden tien haaraan, josta toinen tie vie majataloon ja toinen johtaa suolle, missä Hirmukoira syö kaikki tulijat. Risteyksessä seisoo joko kelmi tai ritari. Mitä Ullan pitäisi kysyä voidakseen tietää minne on turvallista mennä?

5. Outomaassa on kahdenlaista väkeä: viisaita, jotka tietävät kaiken toden todeksi ja epätoden epätodeksi sekä hulluja, jotka luulevat kaiken toden epätodeksi ja epätoden todeksi. Uuno uskoo, että hän ja Tauno ovat hulluja. Ovatko he?

6. Edelleen Outomaasta: Iina uskoo, että hän tai Tiina (siis ainakin toinen) on hullu. Miten on?

7. Edelleen Outomaasta: Saska uskoo, että hän ja Jaska ovat samanlaisia – siis molemmat hulluja tai molemmat viisaita. Miten nyt on?

8. Ja tosi outoa Outomaasta: Ukko uskoo, että Akka uskoo olevansa hullu. Miten on heidän laitansa?

Logiikkaa – vastaukset

1. Jos Kelju olisi syytön, hän puhuisi totta sanoessaan, että he ovat molemmat Kaljun kanssa syyllisiä. Tämä johtaa ristiriitaan. Jos Kelju taas on syyllinen, hän valehtelee, jolloin molemmat eivät voi olla syyllisiä. Näin ollen ainoa syyllinen on Kelju itse.

2. Jos Alli rakastaa Timoa, hän rakastaa myös Mattia. Jos Alli rakastaa Mattia, hän saattaa silti rakastaa myös Timoa. Näin ollen Alli rakastaa joko sekä Timoa että Mattia, tai ainakin Mattia. Jos Alli rakastaa ainoastaan yhtä henkilöä, tämä henkilö on Matti.

3. Jos Kari rakastaa Allia, niin Jaakon sydämen tilasta ei osata vielä sanoa mitään. Jos Kari ei kuitenkaan rakasta Allia, niin tällöin myöskään Jaakko ei häntä rakasta.

4. Ullan tulee osoittaa toista teistä ja kysyä: ”Sanoisitko kyllä, jos kysyisin pääseekö tätä tietä majataloon?” Jos tietä pitkin pääsee majataloon, sekä kelmi että ritari vastaavat kyllä. Jos tietä pitkin ei pääse majataloon, sekä kelmi että ritari vastaavat ei. Näin Ulla tietää minne mennä, oli risteyksessä totta puhuvasta ritarista ja valehtelevasta kelmistä kumpi tahansa.

5. Jos Uuno on viisas, niin hänen uskomuksensa itsensä ja Taunon hulluudesta on totta. He ovat siis molemmat hulluja. Tämä on ristiriita Uunon alussa oletetun viisauden kanssa. Siispä Uuno ei voi olla viisas. Nyt koska Uuno on hullu, hänen uskomuksensa itsensä ja Taunon hulluudesta on epätosi. Siispä ainakin toinen henkilöistä on viisas. Koska Uuno on hullu, niin välttämättä Tauno on Viisas.

6. Jos Iina on viisas, niin hänen uskomuksensa itsensä tai Tiinan hulluudesta on totta. Koska Iina on viisas, niin Tiinan tulee olla hullu. Jos Iina on hullu, niin hänen uskomuksensa itsensä tai Tiinan hulluudesta on epätosi. Siispä he ovat molemmat viisaita. Tämä on ristiriita Iinan hulluuden kanssa. Siispä Iina ei voi olla hullu, joten hän on viisas. Näin ollen Iina on viisas ja Tiina hullu.

7. Jos Saska on viisas, niin myös Jaska on viisas. Jos Saska on hullu, niin Jaska on viisas. Siispä Jaska on viisas, oli Saska kumpaa tahansa.

8. Jos Ukko on viisas, niin on totta, että Akka uskoo olevansa hullu. Jos akka on viisas, niin hänen uskomuksensa omasta hulluudestaan on totta. Tämä on ristiriita, joten Akka on hullu. Jos Akka on hullu, niin hänen uskomuksensa omasta hulluudestaan on epätosi. Siispä Akka on viisas. Tämäkin on ristiriita, joten Ukko ei voi olla viisas. Jos Ukko on hullu, niin väite, että Akka uskoo olevansa hullu on epätosi. Siispä Akka uskoo olevansa viisas. Jos Akka on viisas, hänen uskomuksensa omasta viisaudestaan on totta. Jos Akka on hullu, hänen uskomuksensa omasta viisaudestaan on epätosi. Näin ollen Ukko on hullu, mutta Akka voi olla sekä viisas että hullu.

Lukuja ja yhtälöitä

1. Keksi laskutehtävä, jonka ihminen pystyy suorittamaan, mutta mihin koulun laskimet eivät pysty!

2. Pipareita on pakattu yhtä suuriin pusseihin. Pöydällä on punainen ja sininen kori. Punaiseen koriin tyhjennät kaksi piparipussia. Siniseen koriin tyhjennät kolme piparipussia. Sitten lisäät kolme piparia punaiseen koriin. Nyt koreissa on yhtä monta piparia. Montako piparia on yhdessä pussissa?

3. Punaiseen koriin tyhjennät kaksi piparipussia. Siniseen koriin tyhjennät kolme piparipussia. Sitten syöt viisi piparia sinisestä korista. Nyt koreissa on yhtä monta piparia. Montako piparia on yhdessä pussissa?

4. Punaiseen koriin tyhjennät kaksi piparipussia. Siniseen koriin tyhjennät neljä piparipussia. Sitten lisäät kuusi piparia punaiseen koriin. Nyt koreissa on yhtä monta piparia. Montako piparia on yhdessä pussissa?

5. Punaiseen koriin tyhjennät kaksi piparipussia. Siniseen koriin tyhjennät neljä piparipussia. Sitten lisäät kolme piparia punaiseen koriin. Sitten syöt viis piparia sinisestä korista. Nyt koreissa on yhtä monta piparia. Montako piparia on yhdessä pussissa?

6. Kasperilla on kolme kertaa niin monta piparia kuin Jesperillä ja Jesperillä on kaksi kertaa niin monta kuin Joonatanilla. Kasperilla on 20 piparia enemmän kuin Joonatanilla. Montako kullakin on?

7. Kasperilla on neljä kertaa niin monta piparia kuin Jesperillä ja Jesperillä on neljä kertaa niin monta kuin Joonatanilla. Kasperilla on 60 piparia enemmän kuin Joonatanilla. Montako kullakin on?

8. Kasper, Jesper ja Joonaan riitelevät pipareista. Jesper väittää, että Kasperilla on kolme kertaa niin monta piparia kuin Jesperillä ja Joonatan väittää, että Jesperillä on kaksi kertaa niin monta kuin Joonatanilla. Kasper väittää, että hänellä on 18 piparia enemmän kuin Joonatanilla. Voivatko kaikki puhua totta?

9. Selitä seuraava temppu. Ajattele mitä tahansa kaksinumeroista lukua (kuten 13), jonka toinen numero on kahta numeroa suurempi kuin toinen. Kirjoita lukusi numerot päinvastaisessa järjestyksessä. (Luvusta 13 saisit 31.) Sinulla on nyt kaksi kaksinumeroista lukua. Vähennä suuremmasta pienempi. Vähennä erotuksesta 10. Lukusi on parillinen. Jaa se kahdella. Jaa uudestaan kahdella. Jaa vielä kahdella. Ajattele tulosta. Nyt ajattelet lukua 1.

10. 3-järjestelmässä käytetään merkkejä 0, 1 ja 2. Esimerkiksi 3-järjestelmän luku 211 on $2 \cdot 9 + 3 + 1 = 22$. Muuta 10 järjestelmään 3-järjestelmän luku 2020.

11. Muuta 3-järjestelmään 10-järjestelmän luvut 8, 17 jne. Keksi lisää esimerkkejä itse!

12. Suorita yhteenlasku allekkain 3-järjestelmässä. Kokeile esimerkkejä.

13. Suorita kertolasku allekkain 3-jäjestelmässä. Kokeile esimerkkejä.

14. Suorita jakolaskuja jakokulmassa 3-järjestelmää käyttäen. Kokeile esimerkkejä.

15. Muunna 7-järjestelmän luvut 11, 111 ja 1111 kymmenjärjestelmään. (Tämä on puolet pitkän matematiikan ylioppilaskoetehtävästä 12 keväältä 2001.)

16. Muunna kymmenjärjestelmän luvut 11, 111 ja 1111 seitsenjärjestelmään. (Tämä on puolet pitkän matematiikan ylioppilaskoetehtävästä 12 keväältä 2001.)

17. Yritä suorittaa laskutoimituksia roomalaisilla numeroilla.

18. Laske helposti

    a) $7 \cdot 3 - 7 \cdot 2$
    b) $17 \cdot 23 - 17 \cdot 22$
    c) $987654321 \cdot 1234567 - 987654321 \cdot 1234566$

Lukuja ja yhtälöitä – vastaukset

1. Tähän voi valita valtavan suuret luvut n ja $n+1$, missä $n \in \mathbb{R}$. Nyt on varsin helppoa laskea esimerkiksi näiden kahden luvun erotus.

2. Yhdessä pussissa on kolme piparia.

3. Yhdessä pussissa on viisi piparia.

4. Yhdessä pussissa on kolme piparia.

5. Yhdessä pussissa on neljä piparia.

6. Kasperilla on 24, Jesperillä kahdeksan ja Joonatanilla neljä piparia.

7. Kasperilla on 64, Jesperillä 16 ja Joonatanilla neljä piparia.

8. Ei. (Tässä oletetaan, että piparit ovat kokonaisia.)

9. (Ratkaisun idean voi huomata kirjoittamalla vierekkäin laskut läpi eri luvuille, jolloin samankaltaisuudet tulevat esiin.) Oletetaan, että luvut $a, b \in [1,9]$. Tiedetään, että $b = a + 2$ jolloin $ba > ab$. Huomataan, että aina kun valitaan kaksinumeroinen luku siten, että toinen numero on kahta suurempi kuin toinen, niin tämän luvun ja ”käännetyn” luvun erotus on 18. Tämän voi päätellä esimerkiksi tarkastelemalla ensin kymmeniä ja sitten ykkösiä. Nyt kun luvusta 18 vähennetään kymmenen ja suoritetaan tehtävässä mainitut jakolaskut, päädytään lukuun yksi.

10. $2 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 = 60$

11. Kymmenjärjestelmän luku 8 on kolmijärjestelmässä luku 22. Kymmenjärjestelmän luku 17 on kolmijärjestelmässä luku 122.

12. Yhteenlasku allekkain toimii kuten kymmenjärjestelmässä. Voit tarkistaa tuloksen muuttamalla sen takaisin kymmenjärjestelmään!

13. Kertolasku allekkain toimii kuten kymmenjärjestelmässä. Voit tarkistaa tuloksen muuttamalla sen takaisin kymmenjärjestelmään!

14. Jakolasku jakokulmassa toimii kuten kymmenjärjestelmässä. Voit tarkistaa tuloksen muuttamalla sen takaisin kymmenjärjestelmään!

15. $11_7 = 1 \cdot 7 + 1 \cdot 1 = 8_{10}$, $111_7 = 1 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 1 = 57_{10}$ ja $1111_7 = 1 \cdot 7^3 + 1 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 1 = 400$.

16. $11_{10} = 1 \cdot 7 + 4 \cdot 1 = 14_7$, $111_{10} = 2 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7 + 6 \cdot 1 = 216_7$ ja $1111_{10} = 3 \cdot 7^3 + 1 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 1 = 3132_7$.

17. Esimerkiksi $VII + III = VIIIII = VV = X$. (Roomalaiset numerot perustuvat additiiviseen merkintätapaan.)

18. Tehtävä on helppo kun huomaa, että kertolaskut eroavat toisistaan ainoastaan yhden ykkösen verran.

Lukuteoriaa

1. Miten 3 litran ja 5 litran astioilla voidaan mitata 4 litraa?

2. Mitä tilavuuksia voi mitata 3 ja 5 litran astioilla?

3. Miten 12 litran ja 21 litran astioilla voi mitata 15 litraa?

4. Mitä tilavuuksia voi mitata 12 ja 21 litran astioilla.

5. Namuska pakkaa karkkeja 30 kappaleen laatikoista 18 kappaleen pusseihin. Hän on luvannut panna kaikki laatikoista pöydälle nostetut karkit pusseihin ja olla syömättä yhtään karkkia. Eräänä hetkenä Namuskan pöydällä on 20 karkkia eikä yhtään vajaata laatikkoa tai pussia. Pomo katsoo Namuskaa epäillen ja sanoo “Ethän vaan ole syönyt karkkeja?” Mistä Pomon epäilys heräsi?

Lukuteoriaa – vastaukset

1. Täytetään ensin 5 litran astia. Kaadetaan 5 litran astiasta vettä 3 litran astia täyteen. Nyt 5 litran astiassa on vettä 2 litraa ja 3 litran astia on täynnä. Tyhjennetään 3 litran astia vedestä ja tyhjennetään 5 litran astia 3 litran astiaan. Nyt 3 litran astiassa on 2 litraa vettä ja 5 litran astia on tyhjä. Täytetään 5 litran astia ja kaadetaan siitä 3 litran astia täyteen. Nyt 3 litran astia on täynnä ja 5 litran astiassa on 4 litraa vettä.

2. 3 ja 5 litran astioilla voi mitata kaikki tilavuuden yhdestä kahdeksaan litraan.

3. Täytetään ensin 21 litran astia. Kaadetaan 21 litran astiasta vettä 12 litran astia täyteen. Nyt 21 litran astiassa on vettä 9 litraa. Tyhjennetään 12 litran astia vedestä, ja kaadetaan 21 litran astiassa olevat 9 litraa 12 litran astiaan. Täytetään 21 litran astia vedellä ja kaadetaan siitä 12 litran astia täyteen. Nyt 21 litran astiassa on 18 litraa vettä. Tyhjennetään 12 litran astia ja kaadetaan 21 litran astiasta 12 litran astia täyteen. Nyt 21 litran astiassa on 6 litraa vettä. Siirretään tämä 6 litraa vettä 12 litran astiaan. Täytetään 21 litran astia vielä kerran täyteen ja kaadetaan siitä 12 litran astia täyteen. Nyt 21 litran astiaan jää vettä 15 litraa.

4. 12 ja 21 litran astioilla voi mitata kaikki kolmella jaolliset tilavuudet kolmesta 33 litraan.

5. Vastaus perustuu kolmella jaollisuuteen. Koska sekä pussissa että laatikossa olevien karkkien lukumäärä on kolmella jaollinen, tulisi Namuskalla olla pöydällään aina kolmella jaollinen määrä karkkeja. Luku 20 ei kuitenkaan ole kolmella jaollinen, joten Namuska on salaa pistänyt vähintään yhden karkin suuhunsa.

Geometriaa

1. Kolmion sivujen suhteet ovat $3 : 4 : 5$ (voit tehdä sellaisen kolmella ruutupaperilla tai kolmella viivoittimella.) Yksi kulma näyttää suoralta. Onko se?

2. Miten solmunarulla (siinä on solmuja tasavälein) voi merkitä pihalle suoran kulman?

3. Kolmion sivujen suhteet ovat $3 : 4 : 5$. Mikä on sivua 5 vastaan kohtisuora korkeus?

4. Piste P on tasasivuisen kolmion sisällä. Kolmion korkeus on 15. Luvut a, b, ja c ovat pisteen P etäisyydet kolmion sivuista. Laske $a + b + c$.

5. Piste P on säännöllisen tetraedrin sisällä. Tetraedrin korkeus on 76. Luvut a, b, c ja d ovat pisteen P etäisyydet tetraedrin sivutahkoista. Laske $a + b + c + d$.

6. Lohko kuutio kuudeksi pyramidiksi.

7. Lohko kuutio kolmeksi pyramidiksi. (Näiden huippu ei ole pohjan keskellä.)

8. Piirrä paperille kolmio. Piirrä suorat, jotka kulkevat sivujen keskipisteitten kautta ja ovat näitä vastaan kohtisuorassa. Mitä huomaat? Onko kyseessä näköharha?

9. Piirrä paperille kolmio. Piirrä kolmion kulmille puolittajat (ts. suorat, jotka jakavat kulmat kahteen yhtä suureen osaan.) Mitä huomaat? Onko kyseessä näköharha?

10. Mikä on lyhin matka joen kautta talolle, joka on samalla puolen jokea kuin lähtöpaikka?

11. Katossa on muurahainen, joka haluaa kävellä mahdollisimman lyhyttä reittiä lattiassa olevaan mielenkiintoiseen paikkaan (vain muurahainen tajuaa, mitä kiinnostavaa se siellä näkee). Auta muurahaista!

12. Kuinka monta lävistäjää on 100-kulmiossa? (Tutki lävistäjien määrän lisääntymistä, kun siirrytään kolmiosta nelikulmioon jne. Taulukoi lukuja keksimäsi säännön perusteella.) Tarkastellaan vain kuperia monikulmioita; siis sellaisia, missä ei ole “klommoja”.

13. Kuinka monta lävistäjää on 10 000-kulmiossa. (Älä taulukoi!)

14. Matti kumitti vahingossa Maijan ympyrän keskipisteen. Miten sen voi löytää uudestaan?

Geometriaa – vastaukset

1. On. Asian voi tarkistaa esimerkiksi käänteisellä Pythagoraan lauseella.

2. Edellisen tehtävän nojalla esimerkiksi siten, että kolmion sivujen suhteet ovat $3:4:5$.

3. Tehtävän 1 nojalla tiedetään, että kyseessä on suorakulmainen kolmio, jonka kanta on $4n$, korkeus $3n$ ja hypotenuusa $5n$, missä $n \in \mathbb{N}$. Merkitään sivua 5 vastaan kohtisuorassa olevaa korkeusjanaa kirjaimella h. Nyt kolmion pinta-alasta saadaan yhtälö $\frac{3n \cdot 4n}{2} = \frac{5n \cdot h}{2}$. Ratkaistaan yhtälö korkeuden h suhteen, jolloin vastaukseksi saadaan $h = \frac{12}{5}n$.

4. Piirretään tasasivuinen kolmio, ja merkitään sen sivun pituutta kirjaimella x. Piirretään kolmion sisällä olevasta pisteestä P janat kolmion kärkiin. Näin saadaan kolme pienempää kolmiota, joiden pinta-alat ovat $\frac{ax}{2}$, $\frac{bx}{2}$ ja $\frac{cx}{2}$. Pienempien kolmioiden pinta-alojen summa on sama, kuin alkuperäisen kolmion pinta-ala $\frac{15x}{2}$. Ratkaisemalla tämä yhtälö pisteen P etäisyyksien kolmion sivuista summaksi saadaan $a + b + c = 15$.

5. Piirretään säännöllinen tetraedri, ja merkitään sen tahkon alaa kirjaimella A. Piirretään tetraedrin sisällä olevasta pisteestä P janat tetraedrin kärkiin. Näin saadaan neljä pienempää tetraedriä, joilla on samankokoinen tahko pohjana sekä kärki pisteessä P. Pienempien tetraedrien tilavuuksien summa, joka on $\frac{1}{3}a \cdot A + \frac{1}{3}b \cdot A + \frac{1}{3}c \cdot A + \frac{1}{3}d \cdot A$, on sama kuin alkuperäisen tetraedrin tilavuus $\frac{1}{3} \cdot 76 \cdot A$. Ratkaisemalla tämä yhtälö pisteen P etäisyyksien tetraedrin sivutahkoista summaksi saadaan $a + b + c + d = 76$.

6. Kuution sisälle muodostuu kuusi pyramidia, joiden pohja on yksi kuution sivuista ja huippu on kuution keskipisteessä.

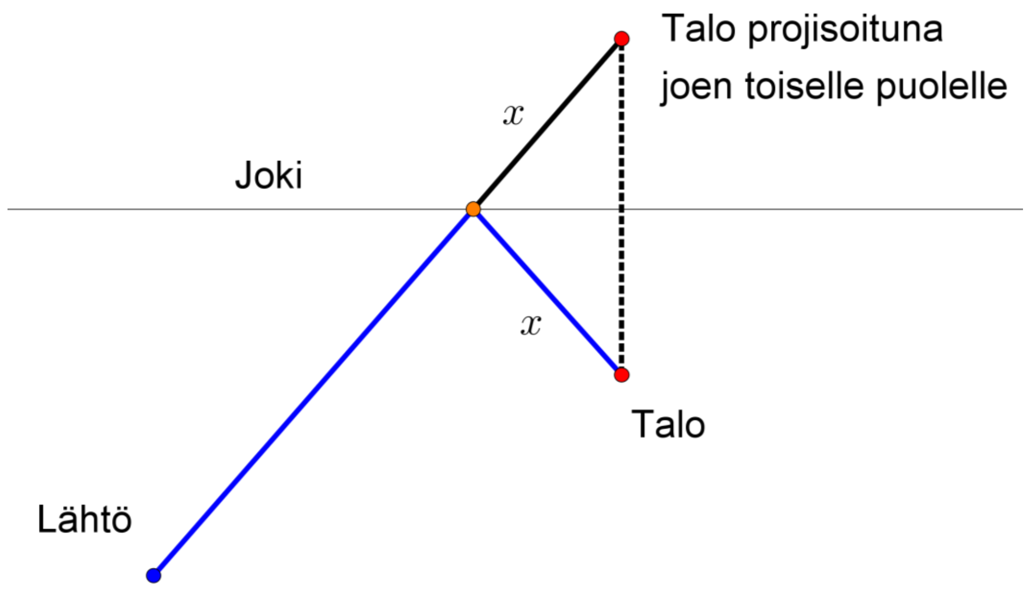
7. Valitaan pyramidien pohjiksi kolme kuution sivua, joilla on yksi yhteinen kärkipiste. Pyramidien kärjet ovat yhteisestä kärjestä lähtevän kuution lävistäjän toisessa päässä.

8. Suoria kutsutaan keskijanoiksi, ja ne leikkaavat toisensa pisteessä, joka on yhtä kaukana kolmion jokaisesta kärjestä. Se on siis pienimmän mahdollisen ympyrän keskipiste, jonka sisään kolmio mahtuu.

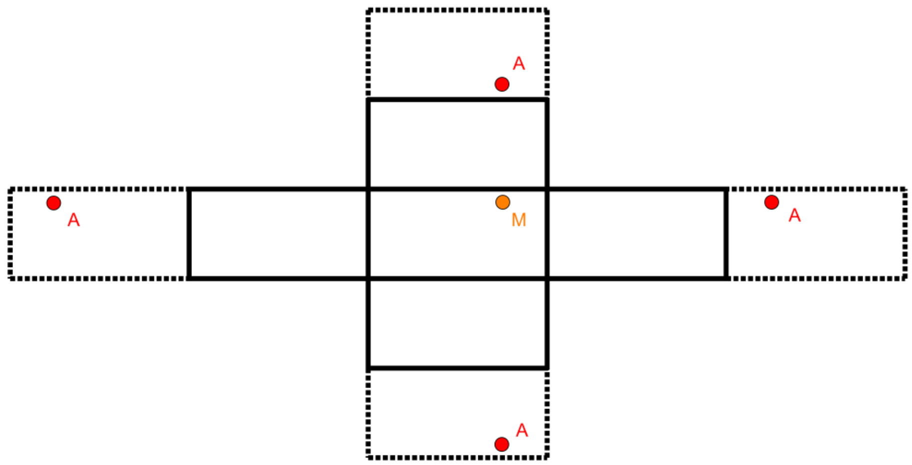
9. Kulmanpuolittajat leikkaavat pisteessä, joka on suurimman mahdollisen kolmion sisään mahtuvan ympyrän keskipiste.

10. Ratkaisun kulmakivi on huomata, että peilaamalla talo joen toiselle puolelle muodostuu tasakylkinen kolmio, jonka kärki voi olla mikä tahansa joen piste. Kolmion kärjestä on

siis yhtä pitkä matka (kuvassa x) sekä talolle että talon peilikuvalle. Lyhin matka lähtöpaikasta talon projektiolle löytyy piirtämällä suora viiva näiden kahden pisteen välille. Siispä kulkemalla tätä suoraa pitkin joelle asti ja kääntymällä sitten kohti taloa tulee kulkeneeksi lyhintä mahdollista reittiä (kuvassa sininen viiva).



11. Tehtävän ratkaisua varten kannattaa piirtää kuva, jossa huone on aukaistu tasoksi. Alla olevassa kuvassa katkoviivalla merkityt alueet esittävät lattiaa, piste M esittää katossa olevaa muurahaista. Kuvan esimerkkitapauksessa muurahaista kiinnostava asia on lattiassa aivan sen alapuolella. Sitä merkitään pisteellä A. Lyhin mahdollinen reitti löytyy, kun piirretään kaikki neljä mahdollista suoraa viivaa lähtöpaikasta määränpäähän, ja valitaan niistä lyhin. Esimerkkitapauksessa muurahaisen kannattaa siis kulkea vasemmalla puolella olevan seinän kautta.



Esimerkkitapaus muurahaisesta katossa.

12. Muodostetaan seuraava taulukko piirtämällä monikulmioita ja laskemalla niiden lävistäjien lukumäärät.

Kulmia	**Lävistäjiä**	**Lävistäjiä enemmän kuin edellisessä**
3	0	
4	2	2
5	5	3
6	9	4
7	14	5
…	…	…
99	4752	97
100	4850	98

Huomataan, että kun monikulmion kulmien lukumäärän kasvaessa lävistäjien lukumäärän kasvu on säännöllistä. Taulukon mukaan laskettuna 100-kulmaisessa kolmiossa on siis $2+3+4+5+\cdots+97+98=4850$ lävistäjää. Laskutoimitus on helppo suorittaa, kun ryhmittelee sitä ensin hieman toisella tavalla: $2+3+4+5+\cdots+97+98=(2+98)+(3+97)+(4+96)+\cdots+(49+51)+50=48\cdot 100+50=4850$.

13. Edellisen tehtävän ideaa hyödyntäen 10 000-kulmion lävistäjien lukumäärä on $(2+9\,998)+(3+9\,997)+(4+9\,996)+\cdots+(4\,999+5\,001)+5\,000=4\,998\cdot 10\,000+5\,000=49\,985\,000$ kappaletta.

14. Valitaan ympyrän kehältä kolme pistettä. Yhdistetään pisteet kolmioksi ja piirretään kolmion kyljille keskijanat. Ne leikkaavat toisensa alkuperäisen ympyrän keskipisteessä (kts. tehtävä 8). Myös ympyrän mitkä tahansa kaksi jännettä käy: piirretään jänteille keskipisteet ja jännettä vastaan kohtisuorat suorat. Nämä suorat leikkaavat ympyrän keskipisteessä.

Kombinatorista päättelyä

1. Tessu-koira hakee sukkia pimeässä huoneessa olevasta laatikosta. Sukat ovat sinisiä tai punaisia, mutta muuten täysin samanlaisia. Montako sukkaa Tessun on vähintään otettava voidakseen olla varma siitä, että otetuista sukista riittää jokaiseen tassuun samanvärinen sukka?

2. Työlohikäärmeet ovat tridejä, tradeja tai trudeja. Ne näyttävät aivan samalta. Kuitenkin tridit voivat työskennellä vain tridien, tradit vain tradien ja trudit vain trudien kanssa. Ritarin on palkattava aarrekammion rakentamiseen työlohikäärmeitä niin, että

palkatuista saadaan ainakin neljä yhteistyöhön. Ritari on varautunut siihen, että muut laiskottelevat hyvin palkattuina. Montako lohikäärmettä ritarin on palkattava voidakseen olla varma siitä, että tehtävä onnistuu?

3. Pöydällä on kortteja, joiden taustalla on jokin kirjaimista A, B, C, D, E, F tai G. Montako korttia on vähintään käännettävä, jotta voidaan olla varmoja siitä, että on käännetty ainakin 10 korttia, joissa on sama kirjain?

4. Huoneessa on 6 henkilöä. Pitääkö toinen väitteistä paikkansa?:

   a) Näiden keskuudessa on 3, jotka tuntevat toisensa.
   b) Näiden keskuudessa on 3, jotka eivät tunne toisiaan. Voitko tietää kumpi? (Tässä tunteminen on molemminpuolista.)

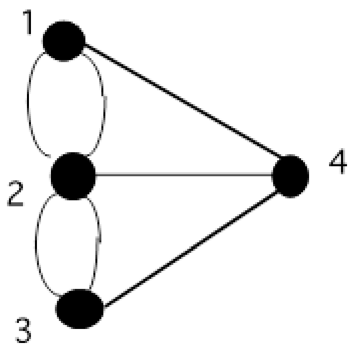
5. Kaksi lasta saapuu aikuisten seurassa joelle, jonka yli on päästävä veneellä. Vene kantaa joko kaksi lasta tai yhden aikuisen. Jokainen osaa soutaa. Miten he voivat ylittää joen, kun aikuisia on

   a) 2
   b) 3
   c) enemmän?

6. Onnistuuko edellisen tehtävän seurueelta pimeän portaikon kautta kulkeminen, kun käytettävissä on vain yksi taskulamppu ja kun portaat kantavat kerralla vain joko kaksi lasta tai yhden aikuisen?

7. Neljä henkilöä on pimeän mutkikkaan portaikon päässä. He tarvitsevat yhteen (kumpaan tahansa) suuntaan portaikossa 7min, 5min, 3min ja 2min. Heidän pitäisi päästä toiseen päähän, mutta käytettävissä on vain yksi taskulamppu. Portaikossa voi kerralla olla enintään kaksi henkeä. Portaikko romahtaa 18 min kuluttua. Kuinka kaikki pääsevät portaikosta? Voivatko kaikki päästä portaikosta ehjin nahoin? Lamppua ei voi heittää tai valoa näyttää matkan päähän toisen auttamiseksi, vaan jokaisen lampun kantajan on kuljettava koko matka.

8. Kuvassa on neljä saarta 1, 2, 3 ja 4. Viivat ovat siltoja. Liisa asuu saarella 1. Voiko hän kävellä kotoa lähtien ja kotiin palaten niin, että hän käyttää jokaista siltaa täsmälleen kerran?



9. Shakkilaudasta on järsitty kaksi vastakkaista nurkkaa. Voiko jäljelle jääneen osan laudasta peittää kahden ruudun kokoisilla palikoilla?

10. Shakkilaudalle asetetaan viiden ruudun kokoisia plus-merkkejä. Merkit eivät saa tulla laudan ulkopuolelle eivätkä mennä päällekkäin. Jos laudalle ei voi enää lisätä plusmerkkejä näitä sääntöjä rikkomatta, niin lauta on tukossa. Mikä on pienin määrä plus-merkkejä, joilla laudan saa tukittua?

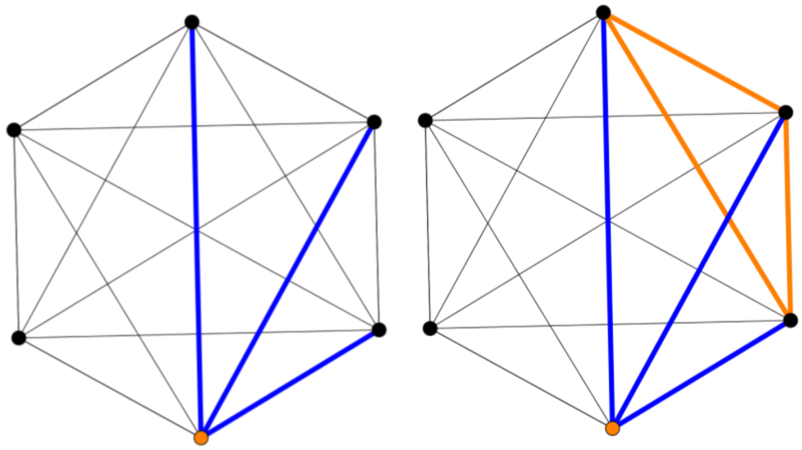
Kombinatorista päättelyä – vastaukset

1. Seitsemän sukkaa.

2. Kymmenen lohikäärmettä.

3. 64 korttia.

4. Havainnollistetaan tilannetta kuvalla. Valitaan kuuden pisteen verkosta yksi henkilö (kuvassa oranssi piste). Tästä pisteestä lähtee viivat viiteen muuhun pisteeseen. Viivat kuvaavat valitun henkilön tuntemissuhdetta ryhmän muihin henkilöihin. Valittu henkilö joko tuntee tai ei tunne jokaisen ryhmän muun jäsenen. Merkitään sinisellä janalla sitä, että janan päätepisteiden henkilöt tuntevat toisensa, ja punaisella sitä, että he eivät tunne toisiaan. Nyt jokaisesta pisteestä lähtee vähintään kolme joko sinistä tai punaista viivaa. Tutkitaan ensin tapausta, jossa valitusta oranssista pisteestä lähtee vähintään kolme sinistä viivaa. Tämä tarkoittaa siis sitä, että kyseinen henkilö tuntee ainakin nuo kolme muuta henkilöä. Kuvassa on esitetty tästä yksi esimerkkitapaus. Tutkitaan oranssilla merkityn henkilön tuntemia kolmea ihmistä. Nämä muodostavat oman kolmionsa, jota kuvassa merkataan oranssilla. Jos jokin oranssin kolmion janoista on sininen, eli jotkin kaksi henkilöä tuntee toisensa, muodostuu sininen kolmio, jossa kolme henkilöä tuntee toisensa. Jos taas mikään oranssin kolmion janoista ei ole sininen, eli henkilöt eivät tunne toisiaan, muodostuu punainen kolmio. Löytyi siis kolme henkilöä, jotka eivät tunne toisiaan.



Tilanne on aivan vastaava siinä tapauksessa, että oranssista pisteestä lähteekin kolme punaista viivaa. Siispä missä tahansa kuuden hengen ryhmässä on joko vähintään kolme henkilöä, jotka eivät tunne toisiaan, tai vähintään kolme henkilöä, jotka tuntevat toisensa. Mielivaltaiselle joukolle ei voida sanoa, kumpi väitteistä pitää paikkansa.

5. Jos aikuisia on

a) kaksi, niin ensin lapset soutavat joen toiselle puolelle. Sitten toinen lapsista soutaa takaisin, ja toinen aikuisista ylittää joen. Toisella puolella oleva lapsi soutaa veneen takaisin, ottaa toisen lapsen kyytiinsä ja soutaa takaisin toiselle puolelle. Nyt toinen lapsista soutaa veneen takaisin ja toinenkin aikuisista ylittää joen. Toisella puolella oleva lapsi käy vielä hakemassa toisenkin lapsen joen toiselle puolelle.
b) kolme, niin toimitaan kuten edellä. Tässä tapauksessa on vielä yksi aikuinen joen väärällä puolella. Toinen lapsista soutaa takaisin, antaa kolmannenkin aikuisen ylittää joen, jonka jälkeen lapsi käy hakemassa toisen lapsen joen toiselle puolelle.
c) Periaate on kuten edellä. Lasten täytyy seilata edestakaisin mahdollistaen aina seuraavan aikuisen pääsyn joen toiselle puolelle.

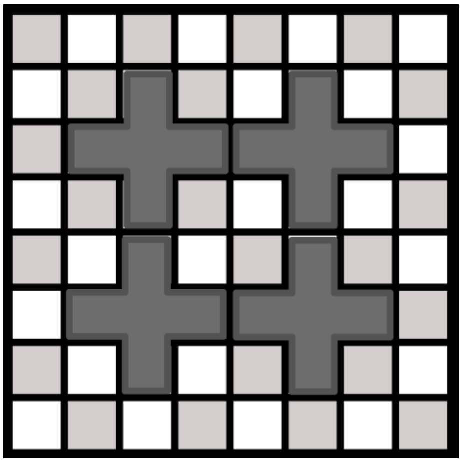
6. Vastaus kuten edellä.

7. Ei hätää, kaikki selviävät ehjin nahoin. Ensin kaksi nopeinta henkilöä menevät yhdessä alas. Heidän matkaansa kuluu 3 minuuttia. Tämän jälkeen nopein henkilö tulee ylös 2 minuutissa. Aikaa on nyt kulunut yhteensä 5 minuuttia. Nyt kaksi hitainta henkilöä menevät alas 7 minuutissa. Käytetty kokonaisaika on nyt 12 minuuttia. Tämän jälkeen alhaalla odottava toiseksi nopein tulee ylös, ottaa nopeimman henkilön mukaansa ja he tulevat yhdessä portaat alas. Tässä kuluu yhteensä 6 minuuttia. Näin ollen siirtymisiin on käytetty yhteensä 18 minuuttia, joten kaikki henkilöt pääsivät turvaan juuri ennen portaiden tuhoutumista.

8. Reittiä ei löydy. Tämä johtuu siitä, että jokaiseen saareen on saavuttava ja sieltä on poistuttava yhtä monta kertaa. Koska halusimme ylittää jokaisen sillan vain kerran, täytyisi jokaisessa saaressa olla parillinen määrä siltoja.

9. Lautaa ei voi enää peittää dominopaloilla. Tämä johtuu siitä, että aina kun dominopalan asettaa sääntöjen mukaan shakkilaudalle, peittää se sekä yhden mustan että yhden valkoisen ruudun. Täten kun laudalle on aseteltu nappuloita, pitää olla peitossa yhtä monta mustaa ja valkoista ruutua. Kun kaikki palat olivat tallella, oli sekä mustia että valkoisia ruutuja 32 kappaletta, eikä tämä tuottanut ongelmaa. Nyt kun hiiri on syönyt reunimmaiset ruudut, on mustia ruutuja edelleen 32, mutta valkoisia enää 30. Tämä tarkoittaa, ettei peittäminen enää onnistu, sillä äskeisen perusteella ruutuja voi peittää vain siten, että sama määrä mustia ja valkoisia on peittyneenä.

10. Pelilaudan voi tukkia neljällä palalla. Vähintään neljä tarvitaan, sillä jokainen laudalla oleva plus-merkki voi olla enintään yhden nurkkaan asetettavan plus-merkin tiellä. Siis jos plus-merkkejä on laudalla vain kolme kappaletta, jossakin nurkassa on tilaa vielä yhdelle plus-merkille. Neljä riittää, sillä laudan voi täyttää merkeillä seuraavasti:



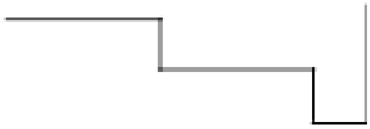
Vektoreita

1. Luokkaan on kätketty aarre. Ovensuussa on paperi, johon on piirretty punaisella ja sinisellä nuoli, toinen paperi, jossa on (vuorotellen) punaisella ja sinisellä kirjoitettuja lukuja kuten 130, 220, jne. Lisäksi teipillä on merkitty lähtöpiste. Vielä on rullamitta, jota voi vetää auki ja huomauttaa, että täällä on lukuja. Ohjepaperin luvut on mitattava paikan päällä niin, että ne antavat reitin aiottuun maaliin.

2. Etsitään merirosvoaarretta ruutupaperilla. Paperin yläreunassa on yhden ruudun pituiset pysty- ja vaakasuuntaiset nuolet, joiden vieressä ovat kirjaimet p ja s edustamassa sanoja "punainen" ja "sininen". (Voi vaikka sanoa, ettei värikyniä ollut

käytössä.) Paperille merkitään jokaista osatehtävää varten ruudukkoon lähtöpiste, ja tehtävänä on löytää aarre. Merirosvon antamat ohjeet ovat seuraavat (sikamaisen huonot, mutta muuta ei näemmä ole!)

a) $3p + 2s + 2p + 5s$
b) $3p - 2s + 2p$
c) $2(3p - 2s)$
d) $-(3p - 4s)$
e) Ole merirosvo ja tee ohje, joka vastaa alla olevan kuvan muotoista reittiä.



Vektoreita - vastaukset

Alla olevaa kuvaa vastaava ohje voi olla esimerkiksi $6s - 2p + 6s - 2p + 2s + 5p$.