

Hanoin torni

Avainsanat: päättely, kombinatoriikka

Luokkataso: 1.-2. luokka, 3.-5. luokka, 6.-9. luokka, lukio

Välineet: erikokoisia palikoita, kirjoja tms., kynä, paperia

Kuvaus: Tehtävässä pohditaan perinteistä Hanoin torni –pulmaa.

Taustaa



Vanhan tarun mukaan Vietnamin pääkaupungin Hanoin temppeliin asetettiin maailman alussa pronssilevy, jossa on pystyssä kolme timanttista neulaa. Jokainen neuloista on kyynärän korkuinen ja yhtä paksu kuin kimalaisen ruumis. Yhteen näistä neuloista pinottiin torniksi 64 erikokoista kultaista kiekkoa suuruusjärjestykseen, suurin alimmaksi. Tätä kutsuttiin Hanoin torniksi.

Tempppelin papit siirtävät tauotta kiekkoja neulasta toiseen. Tempppelin muuttumattomien lakien mukaan kiekkoja saa siirtää vain yhden kerrallaan, eikä suurempi kiekko koskaan saa joutua pienemmän päälle. Lopulta koko torni on saatava siirrettyä ensimmäiseltä timanttineulalta viimeiselle, ja tarun mukaan silloin koittaa maailmanloppu. Tempppelin papit eivät vielä ole saaneet tornia valmiiksi ja siirtelevät kiekkoja tälläkin hetkellä. Tuleekohan maailmanloppu pian?

Onneksi tempppelin pappien torninrakennus kestää vielä aika kauan. Voidaan nimittäin laskea, että 64 palikan tornin siirtämiseen tarvitaan yhteensä 18 446 744 073 709 551 615 siirtoa. Jos oletetaan, että munkit eivät tee virheitä ja yhteen siirtoon kuluu aikaa yksi sekunti, huomataan, että tornin siirtämiseen kuluisi aikaa 585 miljardia vuotta!

Toteutusehdotus

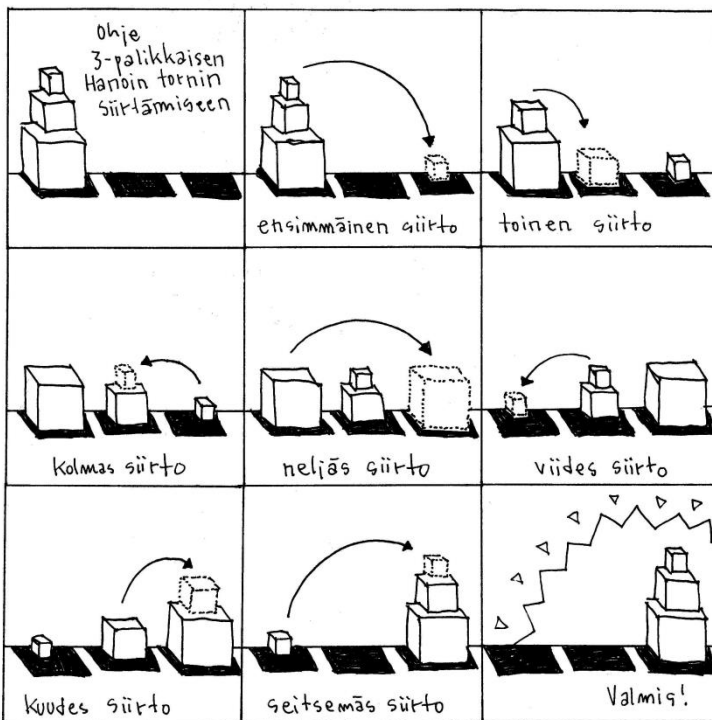
Asetetaan pöydälle vierekkäin kolme alustaa ja pinotaan ensimmäisen alustan päälle erikokoisista palikoista koostuva torni. Suurin palikka asetetaan alimmaiseksi ja sen päällä muut palikat suuruusjärjestyksessä. Tehtävänä on siirtää torni viimeiselle alustalle noudattaen seuraavia sääntöjä:

- Vain yhtä palikkaa saa siirtää kerrallaan.



- Suurempaa palikkaa ei saa laittaa pienemmän päälle.
- Yhdelle alustalle saa laittaa palikoita pinoon yhdeksi torniksi.
- Vain tornien päällimmäisiä palikoita saa siirtää.

Aloita kolmen palikan tornilla. Kun sen siirtäminen onnistuu, kokeile neljän palikan tornia. Entä onnistuvatko viiden ja kuuden palikan tornit? Muista, että alustoja on käytössä aina vain kolme. Palikkoina voit käyttää erikokoisia kirjoja, paperinpaloja tai muita tavaroita, joita voi pinota suuruusjärjestykseen. Alustoiksi kelpaavat vaikkapa tavalliset paperit.



Viereisessä kuvassa on esitetty kolmen palikan tornin siirtäminen. Jos osataan siirtää kolmen palikan torni, niin eikö neljäkin palikkaa siirry helposti? Jotta suurin palikka saataisiin siirrettyä viimeiselle alustalle, on ensin siirrettävä pois sen päällä oleva kolmen palikan torni. Sitten siirretään alin palikka ja taas kolmen palikan torni sen päälle. Kolmen palikan tornihan osattiin jo siirtää.

Entä viiden palikan torni? Ensin neljä palikkaa keskimmaiselle alustalle, sitten alin palikka viimeiselle, ja vielä uudestaan neljä palikkaa sen päälle. Meneekö jo hankalaksi?

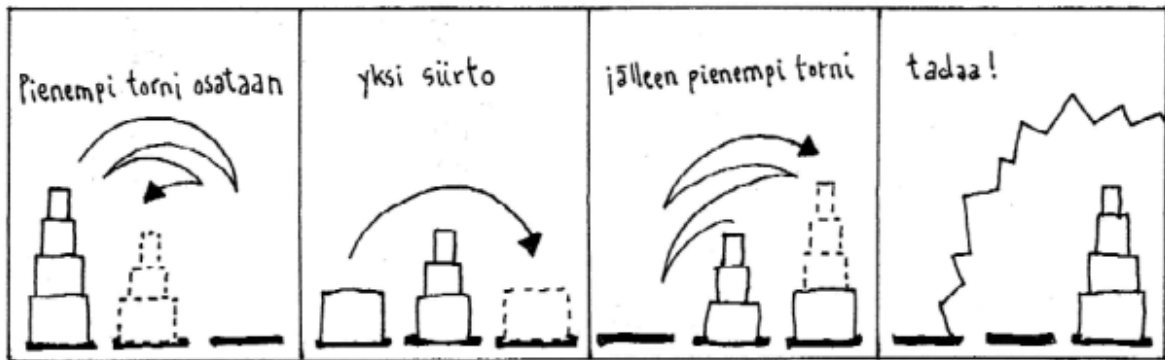
Miten siirtojen määrän sitten voi laskea?

Neljää palikkaa siirrettäessä ensin siirretään kolmen palikan torni, sitten tulee yksi siirto, ja tämän jälkeen kolmen torni siirretään uudestaan. Siirtojen määräksi tulee siis yhteensä kaksi kertaa kolmen tornin siirtämiseen vaadittava määrä plus yksi.

palikoiden lukumäärä	siirtojen lukumäärä
1	1
2	$2 \cdot 1 + 1 = 3$
3	$2 \cdot 3 + 1 = \underline{\quad}$
4	$2 \cdot \underline{\quad} + 1 = \underline{\quad}$
5	$2 \cdot \underline{\quad} + 1 = \underline{\quad}$
6	$2 \cdot \underline{\quad} + 1 = \underline{\quad}$
7	$2 \cdot \underline{\quad} + 1 = \underline{\quad}$

Laske viereiseen taulukkoon, kuinka monta siirtoa tarvitset erikokoisten tornien siirtämiseen. Siirtojen lukumäärä saadaan kun kerrotaan edellisen tornin siirtojen lukumäärä kahdella ja lisätään vielä yksi. Kuinka monta siirtoa tarvitaan kolmen palikan tornin siirtämiseen taulukon mukaan? Entä sarjakuvan mukaan? Montako siirtoa tarvitaan neljän palikan tornin siirtämiseen? Kuinka monta siirtoa sinulta kului?





Voidaanko sanalla tavalla siirtää sadan palikan torni? Entä tuhannen? Kuinka isoja torneja voidaan siirtää?

Vinkki: Hanoiin torni -ongelmaa voi pelata myös verkossa mm. osoitteessa <http://w3.verkkouutiset.fi/misc/hanoi/>.

