

Kömpin kömmähdykset

Avainsanat: äärettömyys

Luokkataso: 1.-2. luokka, 3.-5. luokka, 6.-9. luokka, lukio

Välineet: -

Kuvaus: Klassinen tehtävä, jonka keksi alun perin saksalainen matemaatikko David Hilbert. Tehtävä käsittelee äärettömyyttä konkreettisen (!) esimerkin avulla.

Toteutusehdotus

Upouusi loistohotelli Kömp on juuri valmistunut. Hotellin huoneet on numeroitu järjestyksessä luvusta yksi alkaen (1, 2, 3, ...). Mutta Kömp ei ole aivan tavallinen hotelli: huoneita on nimittäin äärettömän monta. Eräänä iltana on kuitenkin käynyt niin hassusti, että kaikki huoneet ovat täynnä ja paikalle saapunut asiakas saa kuulla, ettei tilaa enää ole. Onneksi hotellin aulassa istuu hotellissa yöpyvä matemaatikko, joka vakuuttaa, että kyse on vain järjestelystä: kaikki ihmiset saadaan kyllä mahtumaan hotelliin.

1. Miten paikalle saapuneelle asiakkaalle voidaan järjestää huone ilman, että entisiä asiakkaita heitetään ulos?

Seuraavana iltana hotelli on edelleen täynnä. Tällä kertaa paikalle saapuu Loputtoman Vaurauden Maasta ääretön määrä turisteja. Hotellin vastaanotossa ollaan jo epätoivoisia. Jos turisteja olisi äärellinen määrä, edellisen illan niksiä voitaisiin käyttää monta kertaa peräkkäin. Onneksi matemaatikko on taas lähistöllä. Mietittyään hetken hän keksii ratkaisun ongelmaan: kaikki ihmiset todella saadaan mahtumaan hotelliin.

2. Miten täyteen hotelliin saadaan mahtumaan äärettömän monta uutta asiakasta siten, että kaikki saavat oman huoneen?

Kolmantena iltana ajaudutaan jo äärimmäisen suuriin ongelmiin. Viereisessä kaupungissa on ääretön määrä hotelleja. Kaikissa on ääretön määrä huoneita ja kaikki huoneet ovat täynnä (eletään talouden nousukautta). Kyseisessä naapurikaupungissa on ilmennyt viemäröinti-ongelmia. Koska kaupungissa haisee pahalle, kaikkien hotellien asiakkaat evakuoidaan. Niinpä Kömpin etuovelle ilmaantuu äärettömän monen hotellin asiakkaat, joista jokainen haluaa oman huoneen. Aulassa vallitsee täysi kaaos. Kömpin henkilökunta tietää, että jos hotelleja olisi äärellinen määrä, ihmiset saataisiin huoneisiinsa käyttämällä edellisen illan konstia riittävän monta kertaa peräkkäin. Kukaan ei kuitenkaan keksi, miten tilanteesta selvittäisiin, ja taas on turvaututtava matemaatikon apuun. Tällä kertaa matemaatikko joutuu miettimään pitkään, mutta keksii kuin keksiinkin ratkaisun: kaikki ihmiset todella mahtuvat hotelliin sopivin järjestelyin.



3. Miten nyt selvittäään: äärettömän monen hotellin asiakkaat on mahdutettava Kömpiin ja jokaisesta hotellista on siis saapunut ääretön määrä asiakkaita. Tämä tehtävä on vaikea mutta ratkaistavissa.

Ratkaisut

1. Paikalle saapunut asiakas sijoitetaan huoneeseen numero 1. Huoneen 1 asukkaat siirretään huoneeseen 2, huoneen 2 asukkaat huoneeseen 3 ja niin edelleen. Näin kaikilla on taas oma huone.
2. Voidaan toimia esimerkiksi seuraavasti: huoneen 1 asukkaat siirretään huoneeseen 2, huoneen 2 asukkaat huoneeseen 4, huoneen 3 asukkaat huoneeseen 6 ja yleisesti kaikki hotellissa jo olevat asiakkaat siirretään huoneeseen, jonka järjestysnumero on kaksi kertaa vanhan huoneen järjestysnumero. Näin saadaan vapaiksi kaikki parittomat huoneet. 1, 3, 5, 7, 9, ... Pannaan nyt ensimmäinen saapunut turistiperhe huoneeseen 1, toinen huoneeseen 3 jne. Koska parittomia lukuja on äärettömän monta, saadaan kaikki turistit huoneisiinsa.
3. Voidaan toimia esimerkiksi seuraavasti: numeroidaan hotellit mukaan lukien Kömp itse luvusta yksi alkaen (1, 2, 3, ...). Merkitään lukupareilla eri huoneiden asukkaita. Merkitään siis esimerkiksi ensimmäisen hotellin neljännen huoneen asukkaita (1, 4) ja kolmannensadannen hotellin kolmannentoista huoneen asukkaita (300, 13). Nyt asiakkaat sijoitetaan huoneisiinsa seuraavan listan mukaisessa järjestyksessä:

(1, 1)

(1, 2), (2, 1)

(1, 3), (2, 2), (3, 1)

(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)

(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)

...

Selvästi jokainen mahdollinen lukupari tulee jossain vaiheessa vastaan: kaikki pääsevät siis johonkin huoneeseen.

