

# Salaperäiset kappaleet

Avainsanat: inversio-ongelmat, Platonin kappaleet, filosofia

Luokkataso: 6.-9. luokka

Välineet: Platonin kappaleet, herneitä tai minivaahtokarkkeja, hammastikkuja, lakana, piirtoheitin

Kuvaus: Tehtävässä pohditaan inversio-ongelmia Platonin kappaleiden avulla.

## Aluksi

Inversio-ongelmien eli käänteisten ongelmien tutkimus on yksi ajankohtaisimmista sovelletun matematiikan tutkimusaloista. Tavallisessa eli suorassa matemaattisessa ongelmassa ilmiöön vaikuttavat syyt tunnetaan ja niiden seuraukset halutaan selvittää. Käänteisten ongelmien tutkimuksessa lähtökohtana on, että ilmiön seuraukset tunnetaan, mutta ei sitä, mitkä tekijät niihin ovat johtaneet.

Inversio-ongelmissa pyritään usein muodostamaan kuvia esimerkiksi tuntemattomien kappaleiden sisältä niiden ulkopuolella tehtävien epäsuorien mittausten avulla. Mittauksia voidaan tehdä tilanteen mukaan eri menetelmillä, kuten röntgensäteillä, sähkövirralla tai ääniaalloilla. Tutkimuksella on merkittäviä sovelluksia esimerkiksi lääketieteessä hammasröntgenkuvauksessa ja aivotutkimuksessa, hiilidioksidipäästöjen arvioinnissa, avaruustutkimuksessa ja maapallon sisäisen rakenteen kuvantamisessa maanjäristysmittausten avulla.

Tässä työssä inversio-ongelmia lähestytään Platonin kappaleiden avulla. Platonin kappaleet ovat säännöllisiä monitahokkaita. Niitä on yhteensä viisi erilaista: tetraedri eli nelitahokas, heksaedri eli kuutio, oktaedri eli 8-tahokas, dodekaedri eli 12-tahokas ja ikosaedri eli 20-tahokas. Platon itse uskoi maailmankaikkeuden muodostuvan näiden viiden kappaleen muodostamista osista.



Platonin kappaleet: tetraedri, heksaedri, oktaedri, dodekaedri ja ikosaedri.



Nimi	Tahkot ovat	Tahkojen lkm	Särmien lkm	Kärkien lkm
Tetraedri	kolmioita	4	6	4
Heksaedri	neliöitä	6	12	8
Oktaedri	kolmioita	8	12	6
Dodekaedri	viisikulmioita	12	30	20
Ikosaedri	kolmioita	20	30	12

Platonin kappaleet ovat myös toistensa duaalikappaleita. Tämä tarkoittaa sitä, että kun jonkin Platonin kappaleen vierekkäisten tahkojen keskipisteet yhdistää toisiinsa, kappaleen sisään muodostuu toinen Platonin kappale. Tetraedrin sisään muodostuu toinen tetraedri, oktaedrin sisään muodostuu kuutio ja ikosaedrin sisään muodostuu dodekaedri. Duaalikappaleilla on keskenään yhtä monta särmää, mutta kärkien ja tahkojen lukumäärät vaihtuvat ristiin.

## Toteutusehdotus

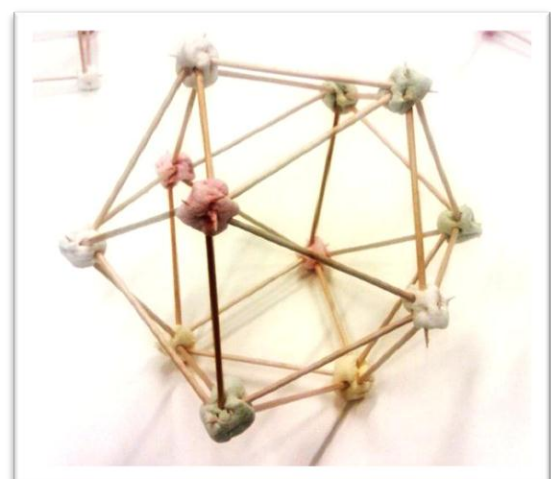
Käydään läpi Platonin luolavertaus (liitteenä). Tässä on hyvä kohta keskustella tieteen filosofiasta ja argumentaatiosta, sekä käydä läpi erilaisia maailmankuvia yleisesti ja pohtia tieteen vaikutusta niiden muuttumiseen.

Jaetaan ryhmälle yön yli lionneita herneitä tai minivaahtokarkkeja sekä hammastikkuja. Peitetään lakanalla piirtoheitin pois näkyvistä. Heijastetaan kustakin Platonin kappaleesta piirtoheittimellä varjokuva seinälle. Nyt pelkkien varjokuvien perusteella mallinnetaan alkuperäiset kappaleet mahdollisimman tarkasti hammastikkujen avulla. Samalla voidaan opetella säännöllisten monitahokkaiden nimet.

Pohditaan jokaisen kappaleen kohdalla tarvittujen herneiden/vaahtokarkkien ja hammastikkujen lukumäärää sekä särmien, kulmien ja tahkojen lukumäärää ja muotoa. Lisäksi kappaleista voidaan tutkia symmetrioita ja esimerkiksi rakenteen kestävyyttä.

## Liitteet

- Platonin luolavertaus



Ikosaedri rakennettuna vaahtokarkeista ja hammastikuista.



## Platon: Valtio (514a-517e)

— Kuvittele joukko ihmisiä, jotka elävät jonkinlaisessa maanalaisessa luolamaisessa olinpaikassa, josta johtaa ulkoilmaan koko luolan levyinen pitkä käytävä. Täällä he ovat olleet lapsesta asti, jaloistaan ja kaulastaan samaan paikkaan kytkettyinä. He pystyvät katsomaan vain sisäänpäin, koska kahle estää heitä kääntämästä päätään. Ylempänä ja kauempana heidän selkensä takana palaa tuli, ja sen ja vankien välissä kulkee samoin ylempänä poikkitie. Sitä pitkin on rakennettu matala muuri, aivan kuin nukketeatterin suojuus, jonka ylitse sen takana olevat esiintyjät näyttävät temppujaan.

— Näen mielessäni tämän kaiken.

— Kuvittele sitten, että tämän muurin takana kanniskellaan kaikenlaisia esineitä, jotka näkyvät muurin yli, myös ihmisten ja eläinten kuvia, kivisiä, puisia ja niin edelleen. Ja jotkut näistä kantajista arvatenkin puhelevat jotakin, toiset ovat vaiti.

— Aika kummallinen näkymä. Ja kummallisia nuo vangitkin ovat.

— Samanlaisia kuin me. Ovatko he ensinnäkään voineet nähdä itsestään ja toisistaan mitään muuta kuin ne varjot, jotka heittyvät tulen varjossa vastapäiselle luolan seinämälle?

— Eivät tietenkään, jos he eivät ole koko elämänsä aikana voineet liikuttaa päätään.

— Ja sama koskee kai niitä esineitä, joita on kuljetettu heidän taitseen?

— Niin tietysti.

— Entä jos he voisivat keskustella keskenään, eivätkö he luulisi puhuvansa juuri noista ohi kannetuista esineistä, vaikka puhuvatkin vain siitä, mitä ovat nähneet?

— Totta kai.

— Ja jos kaiku vastaisi vankilan vastakkaiselta seinäältä aina kun joku ohi kulkevista ihmisistä sanoo jotakin, eivätkö he luulisi tuon äärien tulevan heidän editseen kulkevasta varjosta?

— Tietysti, sehän on selvä.

— Kaiken kaikkiaan nämä vangit pitävät siis totuutena vain noiden keinotekoisien esineiden varjoja.

— Niin, pakostakin.



— Ajattelehan nyt miten heille luonnonmukaisesti kävisi, jos he vapautuisivat kahleistaan ja parantuisivat tietämättömyydestään. Kuvitellaanpa, että joku näistä ihmisistä päästetään kahleista irti ja hänet pakotetaan äkkiä nousemaan, kääntämään päätään, lähtemään liikkeelle ja katsomaan tuleen päin. Kaikki tämä tuottaisi hänelle kipua ja hän häikäistyisi niin, ettei pystyisi näkemään esineitä, joiden varjoja hän on ennen katsellut. Mitä hän nyt mahtaisi sanoa, jos hänelle kerrotaisiin, että se mitä hän ennen näki oli pelkkää harhaa ja että hän on nyt lähempänä olevaista, kääntynyt kohti todemmin olevaa, ja näkee siksi oikeammin? Ja jos hänelle osoitettaisiin kutakin ohi kulkevaa esinettä ja häntä vaadittaisiin sanomaan, mikä se on? Etkö usko, että hän menisi pyörälle päästään ja pitäisi kaikkea ennen näkemäänsä todempana; kuin sitä mitä hänelle nyt näytetään?

— Varmasti, paljonkin.

— Ja jos hänet pakotettaisiin katsomaan suoraan ulkona olevaan valoon, hänen silmiään alkaisi särkeä ja hän yrittäisi väistää kääntymällä sitä päin, mitä hän voi katsella. Hän kuvittelisi tämän todellakin olevan selvempää, kuin se mitä hänelle näytetään.

— Niin juuri.

— Ja jos häntä sitten lähdetäisiin väkisin laahaamaan ylös tuota epätasaista ja jyrkkää käytävää pitkin eikä päästettäisi irti ennen kuin hänet on saatu kiskotuksi ulos auringonpaisteeseen, eikö hän kärsisi ja pyristelisi vastaan? Ja kun hän tulisi ulos aurinkoon, hänen silmänsä häikäistyisivät niin, ettei hän näkisi mitään kaikesta siitä, mitä me sanomme todelliseksi.

— Ei ainakaan niin yhtäkkiä.

— Hän tarvitsee siis totuttelua ennen kuin pystyy näkemään täällä ylhäällä. Ensin hän erottaa helpoimmin varjot, sitten vedestä heijastuvat ihmisten ja muiden olioiden kuvajaiset ja lopuksi oliot itsensä. Tämän jälkeen hän voi siirtyä katselemaan taivaan ilmiöitä ja itse taivasta. Kuitenkin hänen on helpompi katsoa yöllä tähtien ja kuun valoa kuin päivällä aurinkoa ja sen loistetta.

— Se on selvä.

— Lopulta hän sitten voi varmaankin katsoa ja tarkastella aurinkoa, eikä vain sen heijastuksia vedessä tai jossakin muussa vieraassa paikassa, vaan sitä itseään, sen oikealla paikalla.

— Varmasti.

— Tämän jälkeen hän jo päätyisikin siihen tulokseen, että juuri aurinko aiheuttaa vuodenajat ja vuoden kiertokulun, että se hallitsee kaikkea täällä näkyvässä maailmassa ja on jollakin tavoin myös kaikkien niiden ilmiöiden



alkusyy, joita he ovat nähneet entisessä olinpaikassaan.

— Niin, varmasti hän sen jälkeen päätyisi tähän.

— Ja etkö usko, että kun hän muistelee entistä olinpaikkaansa, siellä vallinnutta viisautta ja entisiä vankitovereitaan, hän onnittelee itseään tämän muutoksen johdosta ja säälittelee tovereitaan?

— Kyllä totisesti.

— Olettakaamme edelleen, että heillä oli siellä tapana antaa kunniaa, kiitosta ja palkintoja sille, joka havaitsi tarkimmin kulloinkin ohi vaeltavat varjot, muisti parhaiten millaiset varjot yleensä edelsivät tai seurasivat niitä tai esiintyivät samanaikaisesti, ja pystyi tämän perusteella taitavimmin ennustamaan mitä oli tulossa. Luuletko nyt, että tämä miehemme himoitsee näitä palkintoja ja kadehtii niitä, jotka nauttivat siellä kunniaa ja arvonantoa? Eikö hän, kuten Homeros sanoo, tahtoisi mieluummin raataa päiväläisenä vieraan ja köyhän isännän pellolla ja kestää mitä hyvänsä kuin elää tuolla tavoin, tuollaisten käsitysten vallassa?

— Olen varma, että hän suostuisi mieluummin mihin tahansa kuin tuollaiseen elämään.

— Ja ajattele tätäkin: jos hän laskeutuisi jälleen alas ja asettuisi entiselle paikalleen, eikö tämä äkillinen siirtyminen auringonpaisteesta takaisin saisi hänet näkemään pelkkää pimeää?

— Varmasti.

— Ja jos hänen näin sokaistuneena, ennen kuin hänen silmänsä ovat palautuneet ennalleen — ja viehän niiden totuttautuminen aikansa — pitäisi taas ruveta kilpailemaan noiden koko ikänsä vankeina olleiden kanssa siitä, kuka parhaiten erottaa ohikulkevat varjot, eikö hän joutuisi naurunalaiseksi? Eivätkö muut silloin sanoisi, että hän on käymällä ylhäällä tarvellyt silmänsä ja ettei kannata yrittääkään nousta ylemmäs? Ja jos joku yrittäisi vapauttaa heidät ja viedä ylös, eivätkö he surmaisi häntä, jos vain saisivat hänet käsiinsä?

— Sen he juuri tekisivät.

— Tämä vertaus, hyvä Glaukon, soveltuu kaikin puolin siihen, mitä edellä on esitetty. Vankilamaista asuntoa vastaa näkyvä maailma, ja siinä palavan tulen kajoa auringonvalo. Ja jos ymmärrät, että ylös kiipeäminen ja ylhäällä avautuvien näkymien katseleminen kuvaa sielun kohoamista ajatuksella tavoitettavaan maailmaan, olet tulkinnut käsitykseni oikein. Senhän sinä halusit kuulla; pitääkö se sitten paikkansa, sen tietää jumala. Sellainen mielikuva minulla siis on, että ajatuksella tavoitettavassa maailmassa on viimeisenä ja vain vaivoin nähtävissä hyvä idea. Mutta kun se kerran on nähty, on pakko todeta, että se on kaikissa asioissa kaiken oikean ja hyvän



aiheuttaja; näkyvässä maailmassa se synnyttää valon ja sen valtiaan, ajatuksella tavoitettavassa maailmassa se taas itse valtiaana synnyttää totuuden ja järjen. Ja on todettava myös, että sen, joka haluaa toimia järkevästi yksityisessä tai julkisessa elämässä, on täytynyt nähdä tämä idea.

— Olen samaa mieltä, sikäli kuin pystyn seuraamaan.

— Ja olet toki samaa mieltä myös seuraavasta etkä siis ihmettele, etteivät ne jotka ovat tähän asti päässeet, välitä tavallisista ihmisten puuhailuista vaan että heidän sielunsa pyrkivät aina oleilemaan yläilmoissa. Sehän on luonnollista, mikäli äskeinen vertauksemme pitää paikkansa tälläkin kohden.

— Niin on.

— Entä kun joku saatuaan katsella jumalallisia näkymiä palaa tänne inhimilliseen surkeuteen? Onko ihme jos hän käyttäytyy kömpelösti ja näyttää naurettavalta, kun hän vielä sokaistuneena ja tottumattomana täällä vallitsevaan pimeyteen joutuu tuomioistuimissa tai muualla kiistelemään oikeuden varjoista tai niistä kuvista, joista nämä varjot ovat peräisin? Tai kun hän joutuu taistelemaan niitä käsityksiä vastaan, joita näistä asioista on sellaisilla ihmisillä, jotka eivät ole itse oikeudenmukaisuutta ikinä nähneetkään?

