

# Möbiuksen nauha

Avainsanat: yksipuolinen paperi, kaksiulotteinen pinta, topologia

Luokkataso: 1.-2. luokka, 3.-5. luokka, 6.-9. luokka, lukio

Välineet: paperisuikaleita, paperiristejä (liitteenä) lyijykynä, teippiä, sakset, värikyniä, liimaa ja värillistä paperia

Kuvaus: Onko paperilla aina kaksi puolta? Miten paperisuikaleesta voisi saada yksipuolisen? Tästä tehtävästä löytyy monta eri tapausta Möbiuksen nauhasta ja sen soveltamisesta ristin muotoiseen paperinpalaan. Myös muut paperisuikaleen kierrokset tulee käsitellyksi.

## Aluksi

Möbiuksen nauha on pinta, jolla on vain yksi puoli ja yksi reuna. Sen keksi 1800-luvulla elänyt saksalainen matemaatikko August Ferdinand Möbius. Matemaattisessa mielessä Möbiuksen nauha on suuntautumaton kaksiulotteinen pinta, joka on esitetty kolmiulotteisessa avaruudessa. Möbiuksen nauhan periaatetta on hyödynnetty esimerkiksi hihnoissa ja nostimissa. Tällöin hihnalla on vain yksi puoli ja reuna, joten se kuluu tasaisesti, eikä vain toiselta puolelta tai reunasta.

Tässä tehtävässä on paljon erilaisia tapauksia, joita Möbiuksen nauhasta saa aikaiseksi. Uusia tapauksia voi keksiä myös itse. Tapauksien paljoudesta johtuen voi olla mielekäästä jakaa monisteen tehtäviä eri pareille tai ryhmille. Jokainen voi sitten esimerkiksi kuvata oman tapauksensa ratkaisun ja esitellä sen lopuksi muille. Näin kaikkien ei tarvitse tehdä kaikkea, ja aikaa säästyy. Tai sitten tehtävästä voi käydä pieniä osia kerrallaan, tai valita itseään kiinnostavat tapaukset.

## Kiertymätön paperinauha

Teippaa paperisuikaleen päät kiinni toisiinsa kiertämättä niitä. Onko nauhalla sisä- ja ulkopuoli? Leikkaa nauha keskeltä kahtia. Mitä saat?



## Möbiuksen nauha

Möbiuksen nauhan voi tehdä paperisuikaleesta yhdistämällä sen päät toisiinsa siten, että suikaleen toista päätä kiertää puoli kierrosta ( $180^\circ$ ) ennen yhteen liittämistä. Liitoskohdasta tulee leikkaamista kestävä, kun sen kiinnittää teipillä.



### 1. Tapaus

Tee Möbiuksen nauha. Piirrä muurahainen johonkin kohtaan keskelle nauhaa ja muurahaiskeko nauhan toiselle puolelle samaan kohtaan. Jatka muurahaisen matkaa piirtämällä viivaa nauhan keskustaa pitkin. Mitä käy? Piirrä muurahaiselle reitti myös toiseen suuntaan. Mihin päädyt? Leikkaa Möbiuksen nauha kahtia piirtämäsi viivaa pitkin. Mitä tapahtuu? Testaa onko saamasi nauha Möbiuksen nauha piirtämällä viivaa nauhan keskelle. Leikkaa nauha vielä keskeltä kahtia. Mitä huomaat?

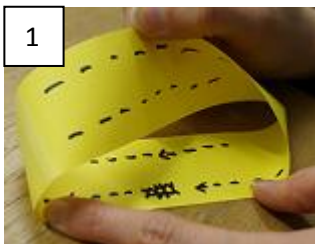


### 2. Tapaus

Möbiuksen nauhan voi tehdä taittamalla toista päätä myötä- tai vastapäivään. Tee itsellesi molemmat versiot. Miten ne eroavat toisistaan?

### 3. Tapaus

Tee Möbiuksen nauha ja piirrä muurahaiselle reitti, jossa se kulkee kierroksen kaksi kertaa jakaen nauhan leveyden kolmeen yhtä suureen osaan. Aloita piirtäminen 1/3 nauhan reunasta. Leikkaa lopuksi saksilla tämä reitti. Mitä huomaat?



## Useampi kierros

### 1. Yksi kokonainen kierros

Tee nyt sellainen nauha, jonka toista päätä on kierretty yksi kokonainen kierros ( $360^\circ$ ) ennen yhteen liittämistä. Leikkaa keskeltä kahtia. Mitä saat?



### 2. Puolitoista kierrosta

Tee nauha, jonka toista päätä on kierretty puolitoista kierrosta ( $360^\circ + 180^\circ$ ) ja leikkaa keskeltä kahtia. Mitä saat?



### 3. Kaksi kierrosta

Tee nauha, jonka toista päätä on kierretty kaksi kokonaista kierrosta ( $2 \times 360^\circ$ ) ja leikkaa keskeltä kahtia. Mitä saat?



4. Mitä saisit jos leikkaisit kaksi ja puoli kierrosta käännetyn nauhan keskeltä kahtia?
5. Entä jos nauhassa olisikin kolme kierrosta?



## Risti

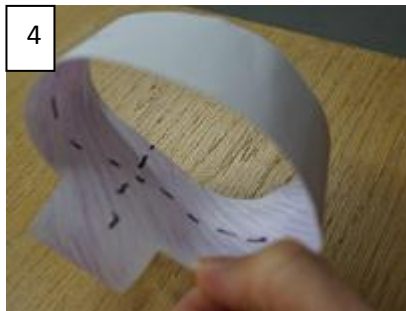
Leikkaa paperista risti ja väritä toinen puoli jollain värillä tai liimaa toiselle puolelle värillinen paperi. Tarvitset yhden ristin kutakin tapausta varten.



### 1. Tapaus

Yhdistä ristin vastakkaiset päät toisiinsa suoraan, kiertämättä niitä. Leikkaa molemmat lenkit puoliksi. Mitä saat?

Saman voi tehdä myös teippaamalla kaksi kiertymätöntä paperinauhaympyrää toisiinsa.



### 2. Tapaus

Yhdistä ristin toiset vastakkaiset päät toisiinsa suoraan ja toiset päät kiertäen toista päätä puoli kierrosta, kuten Möbiuksen nauhassa. Leikkaa taas molemmat lenkit puoliksi. Mitä saat?

Saman voi tehdä myös teippaamalla yhden kiertymättömän paperiympyrän ja yhden Möbiuksen nauhan toisiinsa.



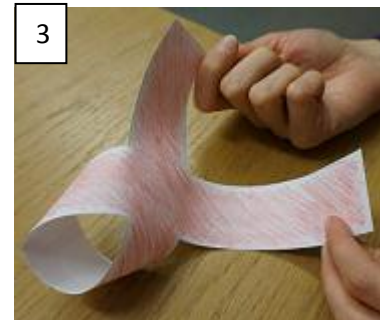
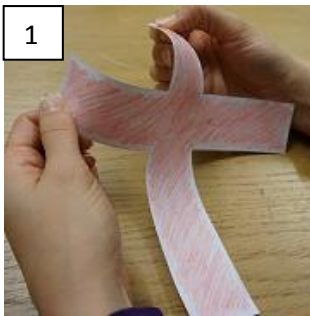
### 3. Tapaus

Yhdistä ristin vastakkaiset päät toisiinsa siten, että molempien lenkkien toista päätä on kierretty puoli kierrosta.

Saman voi tehdä myös kahdesta Möbiuksen nauhasta teippaamalla ne toisiinsa.

### 4. Tapaus

Yhdistä nyt ristin vierekkäiset päät toisiinsa kiertämättä niitä ja leikkaa keskeltä kahtia. Mitä syntyy?





## 5. Tapaus

Yhdistä taas vierekkäiset päät, mutta kierrä nyt molempien lenkkien toista päätä puoli kierrosta Möbiuksen nauhan tavoin, kuitenkin niin, että toisen lenkin toista päätä on kierretty myötäpäivään ja toisen lenkin toista päätä vastapäivään. Leikkaa taas keskeltä kahtia. Mitä huomaat?



## 6. Tapaus

Yhdistä vierekkäiset päät taas kiertämällä, mutta tällä kertaa niin, että molempien lenkkien toista päätä on kierretty myötäpäivään. Leikkaa keskeltä kahtia. Mitä saat nyt?



## 7. Tapaus

Yhdistä vielä vierekkäiset päät, mutta siten, että toinen lenkki on saatu yhdistämällä päät suoraan ja toinen on saatu kiertämällä toista päätä puolikierrrosta. Leikkaa keskeltä kahtia. Mitä tapahtuu?



## Vinkkejä

### Möbiuksen nauha

#### 1. Tapaus

Muurahaisen matka päättyy molempiin suuntiin piirrettynä keolle asti. Muurahaisen reittiä pitkin leikatessa syntyy yksi iso kierteellä oleva nauha, joka ei ole Möbiuksen nauha. Kun taas leikataan, saadaan kaksi toisissaan kiinni olevaa kiertynyttä nauhaa, jotka eivät myöskään ole Möbiuksen nauhoja.

#### 2. Tapaus

Myötä- ja vastapäivään kierretyt Möbiuksen nauhat ovat toistensa peilikuvia. Ne ovat kiraalisia ja niillä on molemmilla oma kätisyys. Kätesi ovat samalla tavalla toistensa peilikuvia.

#### 3. Tapaus

Kolmasosan leveydeltä leikattu Möbiuksen nauha tuottaa kaksi kiertynyttä toisissaan kiinni olevaa nauhaa. Pienempi on Möbiuksen nauha ja isompi ei.

## Liite:

- Ristit



Leikkaa ristit 1 ja 2 irti  
toisistaan viivoja pitkin

