Fibonaccin luvut ja kultainen leikkaus

Avainsanat: Fibonacci, lukujono, kultainen leikkaus, suhde, yhtälö

Luokkataso: 6.-9.-luokka, lukio, yliopisto

Välineet: Kynä, paperi (kulmaviivain, sakset)

Kuvaus: Tutkitaan, mitä ovat mystiset Fibonaccin luvut ja Kultainen leikkaus, miten ne liittyvät toisiinsa ja näkyvät luonnossa.

Aluksi

Kultainen leikkaus on lukujen suhde, jota noudattavat pituudet ja muodot koetaan usein esteettisesti miellyttävänä. Näin ollen kultaista leikkausta on käytetty paljon mm. taiteessa ja arkkitehtuurissa. Kultainen leikkaus on nähtävissä myös luonnossa monien kasvien rakenteissa, kuten lehtien välisen kulman suuruutena. Kultainen leikkaus liittyy läheisesti Fibonaccin lukuihin. Myös Fibonaccin lukuja löytyy luonnosta esimerkiksi männynkävyn tai ananaksen suomujen muodostamien spiraalien lukumääristä. Kultainen leikkaus ja Fibonaccin luvut ovat kiehtoneet matemaatikoita kautta aikojen.

Mehiläisten sukupuu

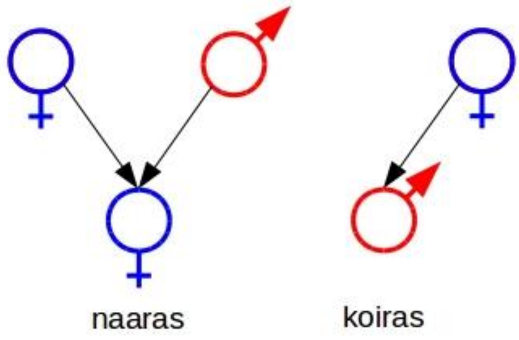
Mitä Fibonaccin luvut sitten käytännössä ovat? Tutustutaan lukuihin tutkimalla mehiläisen sukupuuta.

Mehiläisten sukulaissuhteissa erityistä on se, että kaikilla mehiläisillä ei ole kahta vanhempaa! Mehiläisyhteiskunnassa on kolme eri roolia:

- Pesässä on yksi naaraspuolinen kuningatar. Vain kuningatar voi munia munia.
- Muut naarasmehiläiset ovat työmehiläisiä. Ne eivät voi saada jälkeläisiä.
- Koirasmehiläisiä kutsutaan kuhnureiksi. Kuhnurit syntyvät kuningattaren hedelmöittymättömistä munista, eli niillä ei ole ollenkaan isää.

Kaikki naarasmehiläiset kehittyvät hedelmöittyneistä munista, eli niillä on kaksi vanhempaa. Naaraista tulee useimmiten työläisiä, mutta jos työläinen syö kuningatarhyytelöä, voi siitä kehittyä kuningatar, joka voi perustaa oman mehiläisyhdyskuntansa.

Kuten kuvassa 1 on havainnollistettu, naaraalla on siis aina kaksi vanhempaa, kuhnuri ja kuningatar, kun taas koiraalla on vain yksi vanhempi, kuningatar.



Kuva 1. Naaras- ja koirasmehiläisen vanhemmat.

Muodosta nyt kuhnurin sukupuu: Aloita koirasmehiläisestä, ja piirrä kaavioon sen vanhemmat, vanhempien vanhemmat, ja niin edelleen.

Kirjaa ylös kuinka monta vanhempaa, isovanhempaa, iso-isovanhempaa jne. kuhnurilla on. Voiko edellisen sukupolven koon päätellä muiden sukupolvien ko'oista? Mehiläisen sukupuun sukupolvien koot ovat Fibonaccin lukuja.

Fibonaccin lukujen suhde

Luvut 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,… muodostavat Fibonaccin lukujonon. Fibonaccin lukujonon seuraava jäsen on aina kahden edellisen jäsenen summa.

Miten Fibonaccin luvut sitten liittyvät kultaiseen leikkaukseen? Kultaisen leikkauksen suuruus voidaan määritellä kuvan 2 mukaisesti kahteen osaan jaetun viivan avulla.

Kuva 2. Janan a pituuden suhde janaan b pituuteen on sama, kuin koko viivan pituuden suhde janan a pituuteen.

Minkälainen yhtälö kuvan 2 tilanteesta voidaan muodostaa? Miten yhtälöstä voisi ratkaista, mikä on osuuksien a ja b suhde, eli $\frac{a}{b}$? Tämä suhteen suuruus on kultainen leikkaus. Yhtälön ratkaisemiseksi kannattaa merkitä $x = \frac{a}{b}$ ja kirjoittaa yhtälö muuttujan x avulla. Tarkemmin yhtälön ratkaisusta voi lukea kohdasta *Ratkaisuja ja vinkkejä*.

Yhtälöksi saadaan $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$. Tästä voidaan ratkaista kysytty suhde, eli kultaisen leikkauksen suuruus, joka on

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618033\ldots$$

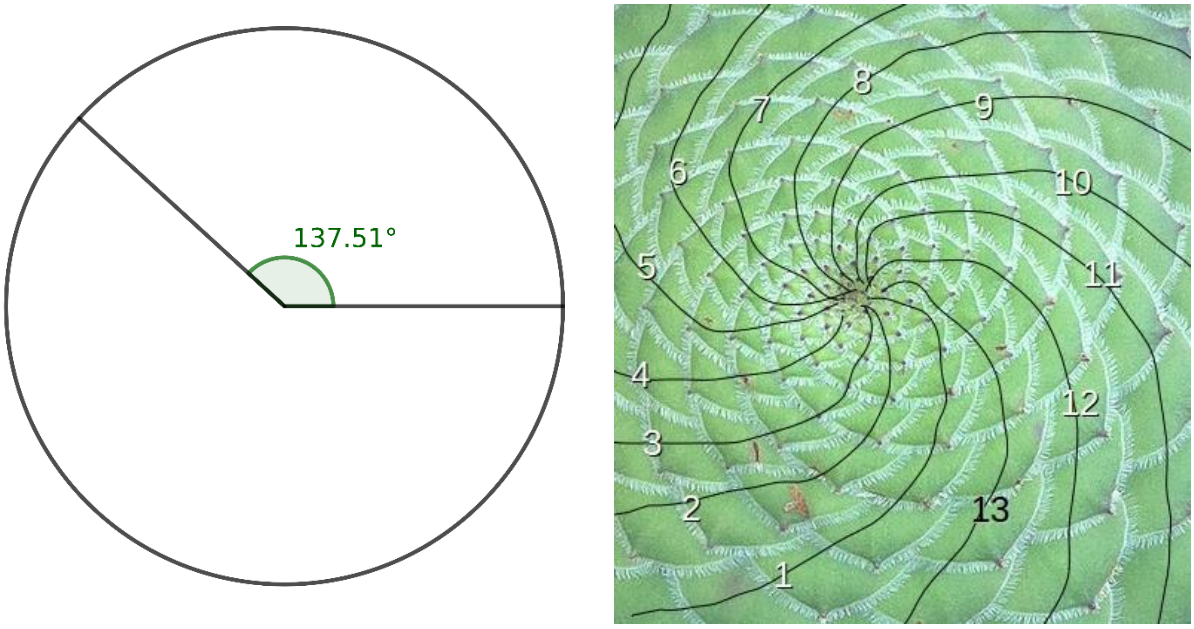
Tutki seuraavaksi peräkkäisten Fibonaccin lukujen suhteita: Mitä on 2/1, 3/2, 5/3 jne.? Laske lukujen suhteita niin pitkälle, että huomaat yhteyden kultaiseen leikkaukseen.

Tutkimuksia luonnossa

Nyt kun on selvitetty, mitä Fibonaccin luvut ja kultainen leikkaus ovat, voidaan tutkia niiden esiintymistä luonnossa.

Kuvassa 3 vasemmalla on niin kutsuttu kultainen kulma: Ympyrän isomman keskuskulman suhde pienempään on sama kuin täyden 360 kulman suhde isompaan kulmaan. Voit tarkistaa, mikä tuon suhteen suuruus on. Monilla kasveilla seuraava lehti kasvaa edelliseen nähden suunnilleen kultaisessa kulmassa. Tutki kulmaviivottimen tai paperista leikatun kultaisen kulman avulla päteekö tämä kasveilla, joita löydät ympäristöstäsi.

Kuvassa 3 oikealla on numeroitu laakamehipuun lehdistä muodostuvia spiraaleja. Spiraaleja on 13, joka on Fibonaccin luku. Hahmotatko kuvasta toiseen suuntaan kiertyviä spiraaleita? Montako niitä on? Spiraaleiden lukumääriä voi tutkia myös esimerkiksi männynkävyistä tai ananaksista.



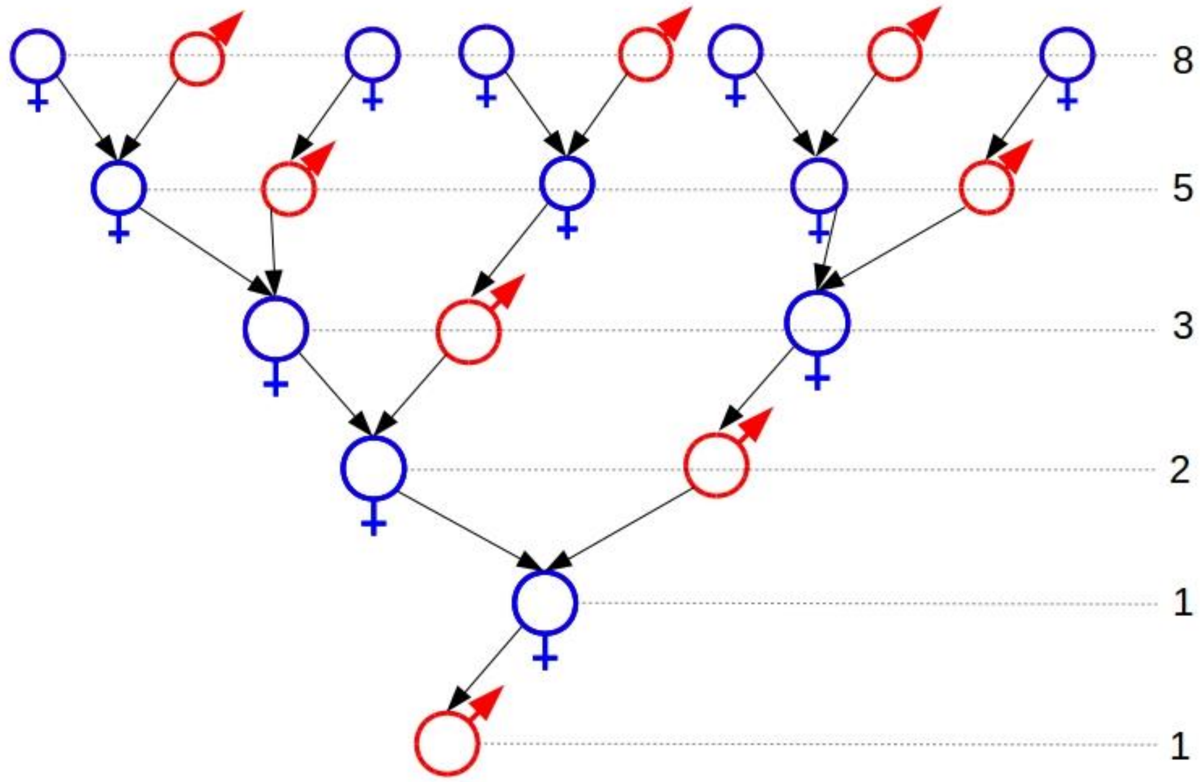
Kuva 3. Kultainen kulma (vas.) ja laakamehipuun lehtien muodostamat 13 spiraalia (oik.). Valokuva laakamehipuusta: Max Rönnersjö / Wikimedia.org (CC BY-SA 3.0)

Ratkaisuja ja vinkkejä

Mehiläisten sukupuu

Jos aloitetaan sukupolvien kokojen luetteleminen ihan ensimmäisestä kuhnurista, saitko tulokseksi luvut 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …?

Kuvassa 4 on esimerkki siitä, miltä kuhnurimehiläisen kuusi sukupolvea kattava sukupuu näyttää.



Kuva 4. Kuhnurin esimerkkisukupuu.

Fibonaccin lukujen suhde

Kultaisen leikkauksen suuruus voidaan määrittää kuvasta 2 saatavasta yhtälöstä seuraavasti: Kuvan tilanteesta saadaan yhtälö

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}.$$

Yhtälön oikea puoli voidaan kirjoittaa myös toisessa muodossa:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{a} + \frac{b}{a} = 1 + \frac{b}{a}$$

Näin ollen alkuperäinen yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{b}{a}.$$

Halutaan selvittää, mikä on suhde a/b, joten merkitään sitä symbolilla x. Kun $x = \frac{a}{b}$, niin x:n käänteisluku puolestaan on

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a/b} = \frac{b}{a}.$$

Siispä alkuperäinen yhtälö voidaan kirjoittaa x:n avulla seuraavasti:

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

Kun yhtälön molemmat puolet kerrotaan x:llä, saadaan tästä

$$x^2 = x + 1,$$

ja edelleen vähentämällä yhtälön molemmilta puolilta x ja 1 saadaan yhtälö, joka voidaan ratkaista toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla:

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Ratkaisukaavalla yhtälön ratkaisuksi saadaan

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

eli $x = 1{,}61803\ldots$ tai $x = -0{,}61803\ldots$. Koska janojen pituudet ovat positiivisia, niiden suhteeksi kelpaa vain yhtälön positiivinen ratkaisu. Näin ollen kysytty suhde a/b, eli kultaisen leikkauksen suuruus, on noin 1,618.

Tutkittaessa Fibonaccin lukujen suhteita, huomataan, että peräkkäisten Fibonaccin lukujen suhteet lähestyvät kultaista leikkausta.

Kultaisen leikkauksen määritteli tiettävästi ensimmäisenä kreikkalainen matemaatikko Eukleides n. 300 eaa teoksessaan Alkeet. Kultaista leikkausta merkitään usein kreikkalaisella kirjaimella φ (lausutaan ”fii”).