

## Valokuvien matematiikkaa

Avainsanat: valokuva, pikseli, päättely

Luokkataso: 3.-5. luokka, 6.-9. luokka, lukio, yliopisto

Välineet: Kynä, tehtävämonisteet (liitteenä), mahdollisiin jatkotutkimuksiin tietokone

Kuvaus: Valokuvat ovat pohjimmiltaan numeroita, ja numeroiden muokkaaminen puolestaan on matematiikkaa. Tehtävässä tutustutaan esimerkiksi kuvien laskutoimituksiin.

### Aluksi

Kun valokuvaa zoomataan tarpeeksi lähelle, huomataan, että kuva muodostuu eri värisistä ruuduista, pikseleistä. Pikseleiden sävyjä voidaan esittää numeroiden avulla. Tavallisessa värikuvassa on kolme värikanavaa, punainen, vihreä ja sininen. Jokaiseen pikseliin liittyy tällöin kolme lukua, jotka kuvaavat eri värien määrää kyseisessä ruudussa. Harmaansävykuvassa puolestaan pikselin kirkkautta voidaan kuvata vain yhdellä luvulla.

Kuvan bitit liittyvät siihen, kuinka paljon eri sävyjä siinä on. Esimerkiksi 1-bittisessä harmaansävykuvassa voi olla vain kahta sävyä, mustaa ja valkoista. 4-bittisessä harmaansävykuvassa erilaisia harmaan sävyjä on 16 (eli 2 potenssiin 4). Tällöin sävyjä esitetään siten, että mustan pikselin arvo on 0 ja valkoisen 15, ja harmaan sävyt ovat jotakin tältä väliltä.

Koska kuvat koostuvat numeroista, niitä voidaan myös esimerkiksi laskea yhteen. Tällöin kukin pikseli lasketaan erikseen yhteen. Jos jonkin pikselin tulos on jotain muuta, kuin väliltä 0-15, se tulkitaan välin päätepisteeksi. Esimerkiksi jos summaksi saataisiin 16, pikseli saa kuitenkin arvon 15.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \text{grey} & \text{black} \\ \hline \text{white} & \text{grey} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \text{grey} & \text{black} \\ \hline \text{grey} & \text{black} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{white} & \text{black} \\ \hline \text{white} & \text{grey} \\ \hline \end{array}$$
  

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 8 & 0 \\ \hline 15 & 8 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 8 & 0 \\ \hline 8 & 0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 15 & 0 \\ \hline 15 & 8 \\ \hline \end{array}$$

Kuva 1: Esimerkki pikseleiden lukuarvoista ja yhteenlaskusta.



Samaa periaatetta, jota on havainnollistettu kuvassa 1, käytetään myös ihan oikeassa kuvanmuokkauksessa. Tietokone voi laskea suuretkin värikuvat pikseli kerrallaan yhteen. Esimerkiksi valokuvausstudiolla voi tulla ongelmia, jos käytössä on vain yksi lamppu, joka ei riitä valaisemaan koko kohdetta. Tämä ongelma voidaan ratkaista ottamalla lampusta kaksi kuvaa, ensin yhdeltä puolelta valaistuna ja sitten toiselta. Kun kuvat lasketaan yhteen, saadaan muodostettua kuva molemmin puolin valaistusta kohteesta. Kuvanmuokkausohjelmat soveltavat muutenkin matematiikkaa moneen toimintoon, kuten esimerkiksi kuvan sävyjen säätämiseen.



Kuva 2: Vaasi on valaistu ensin yhdeltä puolelta ja sitten toiselta. Laskemalla kuvat yhteen saadaan kuva molemmin puolin valaistusta vaasista. Kuvat: Samuli Siltanen



## Tehtävämoniste 1

Väritä ruudukot numeroiden mukaisesti mustalla, valkoisella ja harmaalla. Laske tai päättele tyhjiin ruudukkoon puuttuvat numerot, ja väritä niiden muodostama kuva.

1)

|    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|
| 8  | 15 | 0  | 0  | 15 | 8  |
| 15 | 0  | 15 | 15 | 0  | 15 |
| 0  | 15 | 8  | 8  | 15 | 0  |
| 15 | 0  | 15 | 15 | 0  | 15 |
| 8  | 15 | 0  | 0  | 15 | 8  |
| 0  | 8  | 15 | 15 | 8  | 0  |

 $+$ 

|    |   |    |    |   |    |
|----|---|----|----|---|----|
| 0  | 8 | 15 | 15 | 8 | 0  |
| 0  | 0 | 15 | 15 | 0 | 0  |
| 15 | 0 | 8  | 8  | 0 | 15 |
| 15 | 0 | 8  | 8  | 0 | 15 |
| 8  | 0 | 0  | 0  | 0 | 8  |
| 8  | 8 | 15 | 15 | 8 | 8  |

 $=$ 

|  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

2)

|    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|
| 0  | 15 | 0  | 15 | 8  | 15 |
| 15 | 0  | 15 | 8  | 15 | 8  |
| 0  | 15 | 0  | 15 | 8  | 15 |
| 8  | 0  | 8  | 15 | 0  | 15 |
| 15 | 8  | 15 | 8  | 15 | 8  |
| 8  | 0  | 8  | 15 | 0  | 15 |

 $-$ 

|    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|
| 15 | 8  | 15 | 8  | 0  | 8  |
| 0  | 15 | 0  | 0  | 8  | 8  |
| 15 | 15 | 0  | 8  | 9  | 15 |
| 0  | 15 | 8  | 15 | 8  | 8  |
| 8  | 8  | 15 | 8  | 15 | 0  |
| 0  | 8  | 0  | 8  | 0  | 8  |

 $=$ 

|  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

3)

|    |   |    |   |    |   |
|----|---|----|---|----|---|
| 15 | 8 | 15 | 8 | 15 | 8 |
| 8  | 0 | 0  | 8 | 0  | 0 |
| 15 | 0 | 0  | 8 | 0  | 0 |
| 8  | 8 | 8  | 0 | 8  | 8 |
| 15 | 0 | 0  | 8 | 0  | 0 |
| 8  | 0 | 0  | 8 | 0  | 0 |

 $+$ 

|  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

 $=$ 

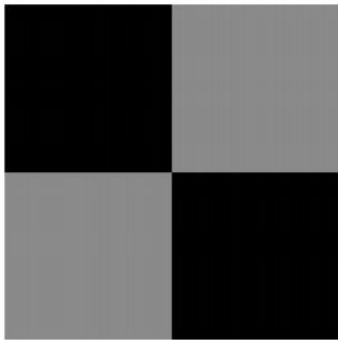
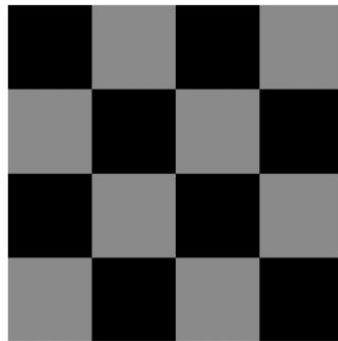
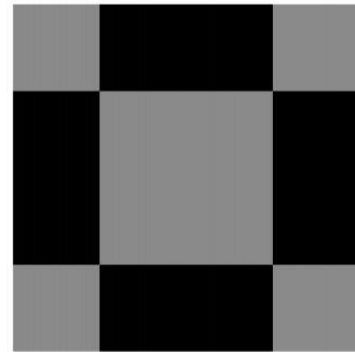
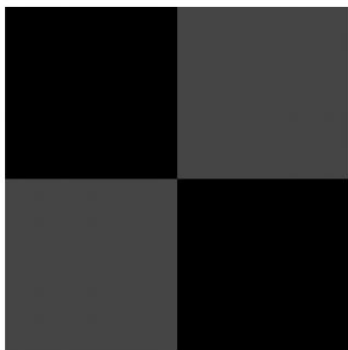
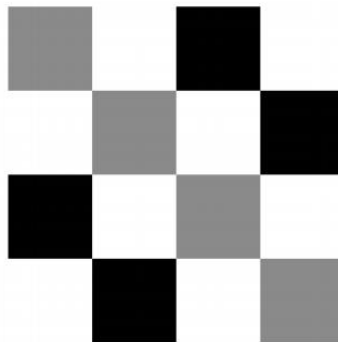
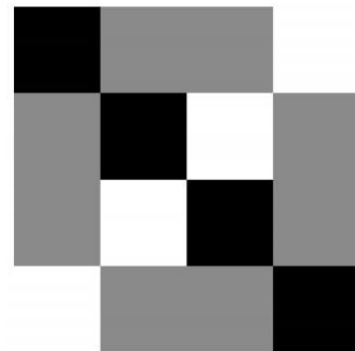
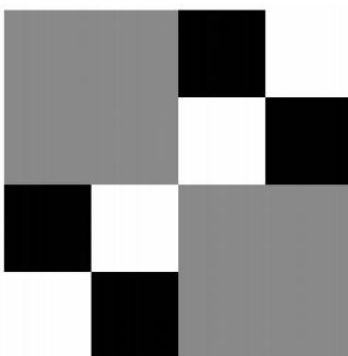
|    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|
| 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 |
| 15 | 8  | 8  | 8  | 8  | 15 |
| 15 | 8  | 15 | 15 | 8  | 15 |
| 8  | 8  | 8  | 8  | 8  | 8  |
| 8  | 0  | 0  | 8  | 0  | 0  |
| 15 | 0  | 0  | 15 | 0  | 0  |

Vertaa viimeisen ruudukon kuviota kaverisi kanssa. Mitä huomaat?

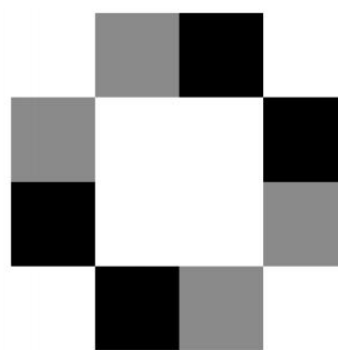


## Tehtävämoniste 2

- a) Mikä oheisista kuvista on  $0,5 \cdot A$ ?  
 b) Mikä oheisista kuvista on  $A + B$ ?  
 c) Kirjota kuva 1 lausekkeena kuvista A, B ja C.  
 d) Kirjota kuva 2 lausekkeena kuvista A, B ja C.

*A**B**C**D**E**F*

1



2



## Jatkotutkimuksia

Mustavalkokuvia voi muodostaa ja tutkia Octave-online -ohjelman avulla. Se löytyy osoitteesta [octave-online.net](http://octave-online.net). Vaihtoehtoisesti voi käyttää myös Matlabia tai FreeMatia. Octave-onlineen voidaan syöttää esimerkiksi tehtävämonisteen 2 kuva A kirjoittamalla komentoriville

```
A=[0 0 8 8; 0 0 8 8; 8 8 0 0; 8 8 0 0]
```

ja painamalla enteriä. Kuvaa vastaavan numeroruudukon luvut kirjoitetaan siis hakasulkeisiin vasemmalta oikealle ja ylhäältä alas, ja ruudukon rivit erotetaan toisistaan puolipisteellä. Syötetyn ruudukon saa näkymään mustavalkokuvana komennolla

```
imshow(A, [0,15])
```

Jos Octaveen on syötetty kuva A, kuten edellä, ja lisäksi syötetään siihen kuva B komennolla

```
B=[0 8 0 8; 8 0 8 0; 0 8 0 8; 8 0 8 0]
```

voidaan Octaven avulla laskea myös kuvia yhteen kirjoittamalla

```
C=A+B
```

Kaikki edellä mainitut kuviot saa näkymään koodilla

```
figure;  
imshow(A, [0,15]), title("A");  
imshow(B, [0,15]), title("B");  
imshow(C, [0,15]), title("C")
```

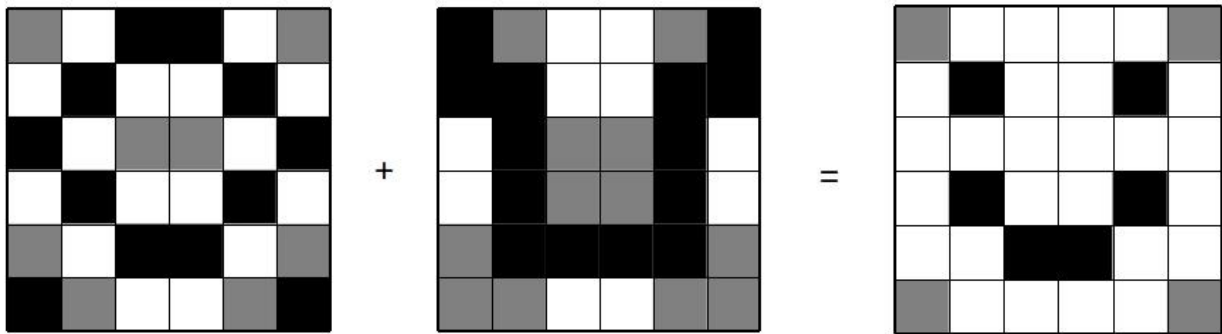
Kuvia muodostetaan siis kirjoittamalla pikseleiden arvot hakasulkeisiin, ja kuvan saa näkymään imshow-komennolla. Voit kokeilla kirjoittaa Octaveen myös tehtävämonisteen 1 kuvia, ja tarkistaa laskusi sen avulla. Voit muutenkin muokata koodia ja kokeilla erilaisia kuvia ja laskutoimituksia.



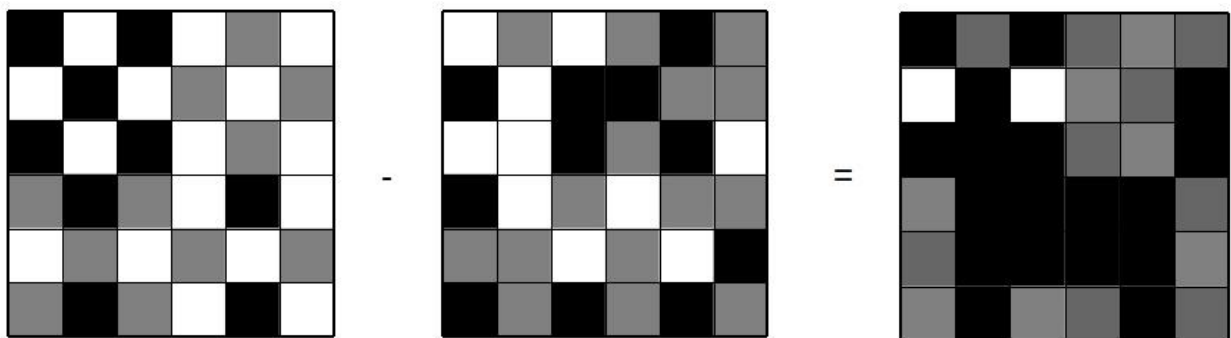
Ratkaisut

Tehtävämoniste 1

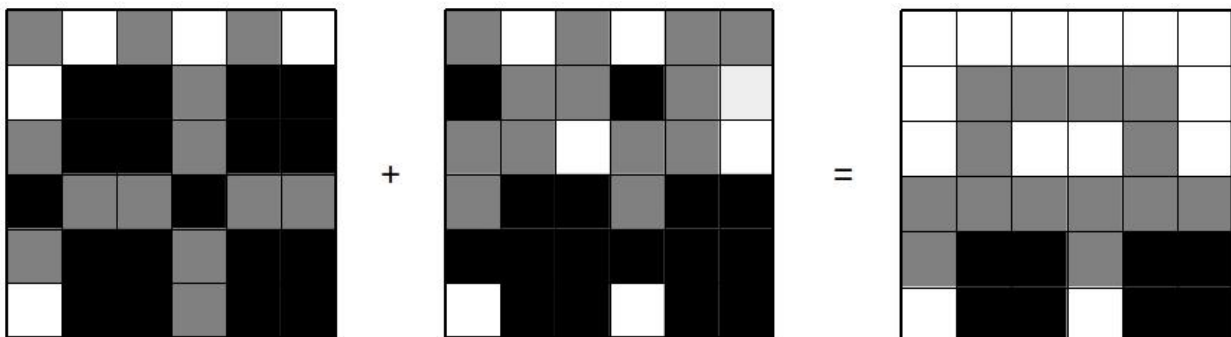
1)



2)



3)



Numeroratkaisut:

1)

|    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|
| 8  | 15 | 15 | 15 | 15 | 8  |
| 15 | 0  | 15 | 15 | 0  | 15 |
| 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 |
| 15 | 0  | 15 | 15 | 0  | 15 |
| 15 | 15 | 0  | 0  | 15 | 15 |
| 8  | 15 | 15 | 15 | 15 | 8  |

2)

|    |   |    |   |   |   |
|----|---|----|---|---|---|
| 0  | 7 | 0  | 7 | 8 | 7 |
| 15 | 0 | 15 | 8 | 7 | 0 |
| 0  | 0 | 0  | 7 | 8 | 0 |
| 8  | 0 | 0  | 0 | 0 | 7 |
| 7  | 0 | 0  | 0 | 0 | 8 |
| 8  | 0 | 8  | 7 | 0 | 7 |

3) esimerkiksi

|    |    |    |    |   |    |
|----|----|----|----|---|----|
| 8  | 15 | 8  | 15 | 8 | 8  |
| 0  | 8  | 8  | 0  | 8 | 15 |
| 8  | 8  | 15 | 8  | 8 | 15 |
| 8  | 0  | 0  | 8  | 0 | 0  |
| 0  | 0  | 0  | 0  | 0 | 0  |
| 15 | 0  | 0  | 15 | 0 | 0  |



Kohdan 3) ruudukon voi täydentää useammalla eri tavalla, sillä jos esimerkiksi ensimmäisen ruudukon ruudussa on luku 8, ja summaruudukossa luku 15, voidaan toiseen ruudukkoon täydentää joko 8 tai 15. 1)- ja 2)-tehtävissä kyseessä on niin sanottu suora ongelma, jossa lähtötilanne tunnetaan, ja määritetään sen perusteella tulos. Kolmannessa tehtävässä puolestaan on kyseessä käänteinen ongelma, eli inversio-ongelma. Lopputuloksesta päätellään lisätietoja lähtötilanteesta. Tällaisissa tapauksissa mahdollisia ratkaisuja voi olla useampi.

### Tehtävämoniste 2

- a) D
- b) F
- c)  $1 = B + C$
- d)  $2 = B + 2C$

